

LUCRAREA 10

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII NELINIARE FOLOSIND METODE DE GRADIENT

10.1. Obiectivele lucrării

În cadrul lucrării, rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare se va face utilizând metoda gradientului, metodă care face parte din categoria metodelor de descreștere. Metodele de descreștere reprezintă căi indirecte de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare, care transformă sistemul inițial de ecuații neliniare într-o problemă de optimizare neliniară fără restricții.

Cerințele lucrării se referă la soluționarea numerică a unui sistem de ecuații neliniare utilizând metoda gradientului. Rezolvarea se va efectua prin calcul manual, iar soluția va fi comparată cu cea obținută prin utilizarea fișierului funcție *met_gradientului* dezvoltat în Matlab. Se va efectua o analiză a rezultatelor obținute și a condițiilor în care au rezultat.

10.2. Aspecte teoretice

10.2.1. Generalități

Caracteristica principală a metodelor de descreștere constă în faptul că transformă sistemul de ecuații neliniare de forma:

89 Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații neliniare folosind metode de gradient

În literatura de specialitate există mai multe căi de construire a funcției auxiliare Ψ care să satisfacă condiția precizată. Cea mai simplă cale de construire a funcției Ψ constă în definirea ei ca produs scalar al funcției $F(X)$ cu ea însăși:

$$\Psi(X) = \frac{1}{2} F(X)^t \cdot F(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (f_i(X))^2 \quad (10.4)$$

Din expresia (10.4) se constată faptul că funcția Ψ este pozitivă, indiferent de punctul X în care este calculată. Totodată, punctul în care se anulează toate funcțiile f_i și care reprezintă soluția sistemului de ecuații corespunde și minimului global al funcției auxiliare Ψ . În continuare, se pune problema minimizării funcției auxiliare Ψ .

În cadrul metodei de gradient, într-o iterație oarecare $k+1$, noua aproximație se determină în funcție de aproximația determinată în iterația anterioară k , căreia i se aplică o corecție proporțională cu gradientul funcției care se minimizează. Deoarece gradientul este orientat întotdeauna în sensul creșterii valorii funcției $\Psi(X)$, pentru minimizarea acestei funcții corecțiile se vor aplica întotdeauna în sens opus gradientului:

$$X^{k+1} = X^k + \lambda^k d^k \quad (10.5)$$

unde:

$$d^k = -g^k = -\nabla \Psi(X^k) \quad (10.6)$$

iar λ^k reprezintă un factor de scară care modifică corecția.

Cele mai bune rezultate se obțin dacă factorul de scară λ^k este recalculat de la o iterație la alta. Recalcularea factorului de scară în cursul unei iterații se face prin rezolvarea unei a doua probleme de minimizare:

$$\Psi(X^{k+1}) = \Psi(X^k - \lambda^k g^k) \stackrel{not}{=} \Phi(\lambda^k) \quad (10.7)$$

Pentru funcția Φ se dorește determinarea valorii factorului de scară λ^k pentru care funcția Ψ în noul punct X^{k+1} se apropie cât mai mult de 0. Problema de minimizare (10.7) se rezolvă folosind metoda anulării derivatelor funcției Φ în raport cu factorul de scară λ^k , obținându-se în final:

$$\lambda^k = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(X^k) \frac{\partial f_i}{\partial X} |_{X^k} \cdot g^k}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial X} |_{X^k} \cdot g^k \right)^2} \quad (10.8)$$

Ținând cont de relația (10.8), relația (10.5) devine:

$$X^{k+1} = X^k + \frac{\sum_{i=1}^n f_i(X^k) \frac{\partial f_i}{\partial X} |_{X^k} \cdot g^k}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial X} |_{X^k} \cdot g^k \right)^2} d^k \quad (10.9)$$

În formă restrânsă relația (10.9) devine:

$$X^{k+1} = X^k + \frac{(g^k)^t \cdot g^k}{(d^k)^t \cdot (J^k)^t \cdot J^k \cdot d^k} d^k \quad (10.10)$$

unde:

$$g^k = (J^k)^t \cdot F^k \quad (10.11)$$

Exemplu numeric

Se consideră un sistem format din două ecuații neliniare de forma (10.1). Se cere determinarea soluției acestui sistem folosind metoda gradientului.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 - 3 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare

Se inițializează aproximația inițială a soluției:

$$x_1^0 = 1,5; \quad x_2^0 = 1$$

Se calculează matricea jacobiană,

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

91 Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații neliniare folosind metode de gradient

Iteratia 1. Se înlocuiește aproximația inițială în sistem:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 2,25 + 1,5 - 3 = 0,75 \\ f_2(x_1, x_2) = 1,5 + 1 - 2 = 0,5 \end{cases}$$

Se înlocuiește aproximația inițială în matricea jacobiană:

$$J(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1,5 + 1 & 1,5 \\ 1 & 1,5 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1,5 \\ 1 & 3,5 \end{bmatrix}$$

Se calculează gradientul $g^{(0)}$:

$$g^{(0)} = (J^{(0)})^t \cdot F^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1,5 & 3,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 2,875 \end{bmatrix}$$

Se calculează direcția $d^{(0)}$:

$$d^{(0)} = -g^{(0)} = \begin{bmatrix} -3,5 \\ -2,875 \end{bmatrix}$$

Se determină factorul de scară $\lambda^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \lambda^{(0)} &= \frac{(g^{(0)})^t \cdot g^{(0)}}{(d^{(0)})^t \cdot (J^{(0)})^t \cdot J^{(0)} \cdot d^{(0)}} = \frac{\begin{bmatrix} 3,5 \\ 2,875 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 3,5 \\ 2,875 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -3,5 \\ -2,875 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1,5 \\ 1 & 3,5 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1,5 \\ 1 & 3,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3,5 \\ -2,875 \end{bmatrix}} \\ &= 0,0395 \end{aligned}$$

În continuare sunt determinate noile valori ale aproximațiilor:

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda^{(0)} \cdot d^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} + 0,0395 \cdot \begin{bmatrix} -3,5 \\ -2,875 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3617 \\ 0,8864 \end{bmatrix}$$

Iterația 13

Se înlocuiește aproximația din iterația 12 în matricea jacobiană:

$$J(x_1^{(12)}, x_2^{(12)}) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1,3417 + 0,8944 & 1,3417 \\ 0,8944 & 1,3417 + 2 \cdot 0,8944 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,5777 & 1,3417 \\ 0,8944 & 3,1305 \end{bmatrix}$$

Se calculează gradientul $g^{(12)}$:

$$g^{(12)} = (J^{(12)})^t \cdot F^{(12)} = \begin{bmatrix} 3,5777 & 0,8944 \\ 1,3417 & 3,1305 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,00001353 \\ -0,00002941 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00002209 \\ -0,00007392 \end{bmatrix}$$

Se calculează direcția $d^{(12)}$:

$$d^{(12)} = -g^{(12)} = \begin{bmatrix} -0,00002209 \\ 0,00007392 \end{bmatrix}$$

Se determină factorul de scară $\lambda^{(12)}$:

$$\begin{aligned} \lambda^{(12)} &= \frac{(g^{(12)})^t \cdot g^{(12)}}{(d^{(12)})^t \cdot (J^{(12)})^t \cdot J^{(12)} \cdot d^{(12)}} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 0,00002209 \\ -0,00007392 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 0,00002209 \\ -0,00007392 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -0,00002209 \\ 0,00007392 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 3,5777 & 1,3417 \\ 0,8944 & 3,1305 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 3,5777 & 1,3417 \\ 0,8944 & 3,1305 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,00002209 \\ 0,00007392 \end{bmatrix}} \\ &= 0,1317 \end{aligned}$$

Determinarea noilor valori ale aproximațiilor se va face având la bază formula iterativă:

$$\begin{aligned} X^{(13)} &= X^{(12)} + \lambda^{(12)} \cdot d^{(12)} = \begin{bmatrix} 1,3417 \\ 0,8944 \end{bmatrix} + 0,1317 \cdot \begin{bmatrix} -0,00002209 \\ 0,00007392 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1^{(13)} \\ x_2^{(13)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1,3416 \\ 0,8944 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

10. 3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se studiază fișierul funcție *met_gradientului* construit în limbajul Matlab, prezentat în Anexa 2.

93 Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații neliniare folosind metode de gradient

3. Se testează fișierul funcție *met_gradientului* folosind exemplul numeric prezentat în paragraful 2.
4. Se soluționează următoarele aplicații cu ajutorul metodei gradientului.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 3x_1^3 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - 5x_2 = 0 \end{cases}$$

Rezolvarea se va face manual, iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcției Matlab *met_gradientului*.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele obținute cu metoda Newton-Raphson (Lucrarea 9) și condițiile în care au rezultat.

