

LUCRAREA 11

DERIVAREA NUMERICĂ

11.1. Obiectivele lucrării

Derivarea numerică se folosește în situația în care nu se cunoaște expresia analitică a funcției $f(x)$ supusă acestei operații. Astfel, punctul de plecare în cazul derivării numerice îl constituie determinarea expresiei unei funcții $F(x)$ care să aproximeze cât mai bine funcția $f(x)$. Diferitele formule de derivare numerică a expresiei funcției de aproximare $F(x)$ se obțin prin diverse metode, cum ar fi: folosirea definiției derivatei într-un punct, utilizarea dezvoltării în serie Taylor sau folosirea polinoamelor de aproximare. Cele mai frecvente aplicații ale derivării numerice se referă la aproximarea expresiei funcției $f(x)$ printr-un polinom având un anumit grad, urmată de calculul derivatelor acestui polinom.

În cadrul lucrării se va prezenta modul de aproximare a derivatelor de ordinul 1 și 2 corespunzătoare unei funcții $f(x)$, utilizând polinoame de interpolare Newton de ordinul 1, cu diferențe finite la dreapta. Rezolvarea se va efectua prin calcul manual și cu funcția Matlab *deriv_pol_newton*. Se va efectua o analiză a rezultatelor obținute și a condițiilor în care au rezultat.

11.2. Aspecte teoretice

11.2.1. Generalități

Pornind de la relația de definiție a derivatei unei funcții $f(x)$ (definită analitic sau prin puncte) în punctul x_0 ,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (11.1)$$

și renunțând la limită, în condițiile în care distanța dintre două noduri de interpolare, h , este suficient de mică, se obține expresia aproximării derivatei:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ pentru } h > 0 \quad (11.2)$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \text{ pentru } h < 0 \quad (11.3)$$

Aproximarea dată de expresia (11.2) este cunoscută sub denumirea de aproximare cu diferențe progresive, iar aproximarea dată de expresia (11.3) este denumită aproximare cu diferențe regresive. Acestor două expresii de aproximare a derivatei le putem asocia interpretarea geometrică prezentată în Fig. 11.1.

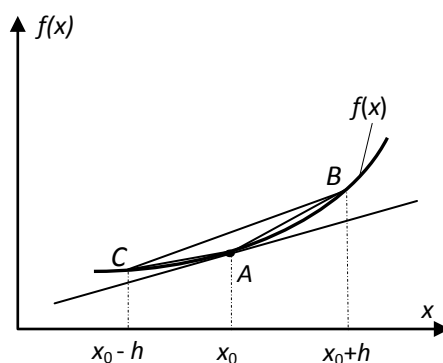


Fig. 11.1. Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții $f(x)$

Din Fig. 11.1 se poate observa faptul că derivata funcției $f(x)$ într-un punct x_0 reprezintă panta tangentei la graficul funcției în punctul considerat.

Relația (11.2) aproximează tangenta prin dreapta AB , iar relația (11.3) aproximează funcția prin dreapta CA . O aproximație mai bună a derivatei funcției în punctul x_0 se obține dacă se ia în considerare dreapta care trece prin punctele C și B , dreaptă a cărei pantă este mai apropiată de tangenta la curbă în punctul x_0 . În acest sens, derivata funcției $f(x)$ în punctul de abscisă x_0 poate fi aproximată de raportul:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (11.4)$$

Astfel, aproximarea derivatei se face ca o medie aritmetică a aproximărilor date de expresiile (11.2) și (11.3), fiind cunoscută sub denumirea de *aproximare cu diferențe centrale*.

Eroarea de aproximare poate fi calculată apelând la dezvoltarea în serii Taylor a funcției $f(x)$ în jurul punctului x_0 , obținându-se în final:

$$e_t = \frac{h^2}{6} f'''(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (x_0 - h, x_0 + h) \quad (11.5)$$

Se poate observa că, pentru intervale h din ce mai înguste, eroarea de trunchiere scade. Dar, pentru h foarte mic, valorile $f(x_0 - h)$ și $f(x_0 + h)$ pot deveni aproximativ egale, astfel încât scăderea lor generează erori de rotunjire foarte mari. Pe de altă parte nu trebuie omisă nici dependența erorii de derivatele de ordinul 3, care în anumite situații poate fi ea însăși foarte mare, compensând reducerea pasului h .

11.2.2. Derivarea numerică folosind polinoame de tip Newton

Polinoamele de interpolare Newton folosesc un pas de interpolare h constant:

$$x_k = x_1 + (k - 1) \cdot h \quad (11.6)$$

Expresia aproximării funcției $f(x)$ definită tabelar în $n + 1$ noduri de interpolare echidistante $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ este dată de relația:

$$\begin{aligned} f(x) = & f_1 + \frac{\Delta f_1}{1!h} (x - x_1) + \frac{\Delta^2 f_1}{2!h^2} (x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ & + \frac{\Delta^{n+1} f_1}{(n+1)!h^{n+1}} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}) \end{aligned} \quad (11.7)$$

În continuare, se face o ipoteză conform căreia derivatele sunt calculate într-un punct din apropierea extremității din stânga a intervalului de definiție, deci nodul de

referință este x_1 . Pentru $x = x_1$, ținând seama și de distribuția echidistantă a nodurilor, se obțin expresiile derivatelor de ordinul 1 și 2, f' și f'' :

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left(\Delta f_1 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_1 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_1 - \frac{1}{4} \Delta^4 f_1 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \Delta^n f_1 \right) \quad (11.8)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 f_1 - \Delta^3 f_1 + \frac{11}{12} \Delta^4 f_1 + \dots \right) \quad (11.9)$$

Determinarea erorii de aproximare a derivatei se poate face cu relația:

$$e'_N(x_1) = (-1)^n \frac{\Delta^{n+1} f_1}{h(n+1)} \quad (11.10)$$

Relația (11.10) evidențiază dependența erorii de aproximare de numărul de noduri de interpolare (eroarea scade la creșterea lui n), precum și riscul creșterii erorii atunci când pasul de interpolare are valori prea mici.

Exemplu numeric

Să se calculeze derivata de ordinul 1 a funcției $f(x) = \log_{10}(x)$, în punctul $x = 50$, folosind un polinoam de interpolare Newton de ordinul 1, cu diferențe finite la dreapta.

Valoarea exactă a derivatei este:

$$(\log_n(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(n)} = \frac{1}{50 \cdot \ln 10} = 0,008685889638065$$

Rezolvare

- Se alege pasul de interpolare $h = 1$, astfel încât nodurile de interpolare sunt:
 $x_2 = 51; x_3 = 52; x_4 = 53; x_5 = 54; x_6 = 55; x_7 = 56; x_8 = 57; x_9 = 58; x_{10} = 59; x_{11} = 60...$

- Se calculează valorile funcției $f(x)$ în nodurile de interpolare:

$$f(x_1) = \log(50) = 1,6990; f(x_2) = \log(51) = 1,7076; f(x_3) = \log(52) = 1,7160;$$

$$f(x_4) = \log(53) = 1,7243; f(x_5) = \log(54) = 1,7324; f(x_6) = \log(55) = 1,7404;$$

$$f(x_7) = \log(56) = 1,7482; f(x_8) = \log(57) = 1,7559; f(x_9) = \log(58) = 1,7634;$$

$$f(x_{10}) = \log(56) = 1,7709; f(x_{11}) = \log(57) = 1,7782.$$

- Se calculează diferențele finite de ordinul 1:

$$\Delta f_1(1) = f(x_1) - f(x_2) = 1,7076 - 1,6990 = 0,0086;$$

$$\Delta f_1(2) = f(x_2) - f(x_3) = 1,7160 - 1,7076 = 0,0084;$$

$$\Delta f_1(3) = f(x_3) - f(x_4) = 1,7243 - 1,7160 = 0,0083;$$

$$\Delta f_1(4) = f(x_4) - f(x_5) = 1,7324 - 1,7243 = 0,0081;$$

$$\Delta f_1(5) = f(x_5) - f(x_6) = 1,7404 - 1,7324 = 0,0080;$$

$$\Delta f_1(6) = f(x_6) - f(x_7) = 1,7482 - 1,7404 = 0,0078;$$

$$\Delta f_1(7) = f(x_7) - f(x_8) = 1,7559 - 1,7482 = 0,0077;$$

$$\Delta f_1(8) = f(x_8) - f(x_9) = 1,7634 - 1,7559 = 0,0076;$$

$$\Delta f_1(9) = f(x_9) - f(x_{10}) = 1,7709 - 1,7634 = 0,0074;$$

$$\Delta f_1(10) = f(x_{10}) - f(x_{11}) = 1,7782 - 1,7709 = 0,0073.$$

- Se calculează diferențele finite de ordinul 2:

$$\Delta^2 f_1(1) = \Delta f_1(2) - \Delta f_1(1) = 0,0084 - 0,0086 = -0,1670 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta^2 f_1(2) = \Delta f_1(3) - \Delta f_1(2) = 0,0083 - 0,0084 = -0,1606 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta^2 f_1(3) = \Delta f_1(4) - \Delta f_1(3) = 0,0081 - 0,0083 = -0,1546 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta^2 f_1(4) = \Delta f_1(5) - \Delta f_1(4) = 0,0080 - 0,0081 = -0,1490 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta^2 f_1(5) = \Delta f_1(6) - \Delta f_1(5) = 0,0080 - 0,0081 = -0,1436 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta^2 f_1(6) = \Delta f_1(7) - \Delta f_1(6) = 0,0080 - 0,0081 = -0,1385 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta^2 f_1(7) = \Delta f_1(8) - \Delta f_1(7) = 0,0080 - 0,0081 = -0,1337 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta^2 f_1(8) = \Delta f_1(9) - \Delta f_1(8) = 0,0080 - 0,0081 = -0,1291 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta^2 f_1(9) = \Delta f_1(10) - \Delta f_1(9) = 0,0080 - 0,0081 = -0,1248 \cdot 10^{-3};$$

- Se calculează diferențele finite de ordinul 3:

$$\Delta^3 f_1(1) = \Delta^2 f_1(2) - \Delta^2 f_1(1) = -0,1606 \cdot 10^{-3} - (-0,1670 \cdot 10^{-3}) = 0,6363 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta^3 f_1(2) = \Delta^2 f_1(3) - \Delta^2 f_1(2) = -0,1546 \cdot 10^{-3} - (-0,1606 \cdot 10^{-3}) = 0,6006 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta^3 f_1(3) = \Delta^2 f_1(4) - \Delta^2 f_1(3) = -0,1490 \cdot 10^{-3} - (-0,1546 \cdot 10^{-3}) = 0,5675 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta^3 f_1(4) = \Delta^2 f_1(5) - \Delta^2 f_1(4) = -0,1436 \cdot 10^{-3} - (-0,11490 \cdot 10^{-3}) = 0,5368 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta^3 f_1(5) = \Delta^2 f_1(6) - \Delta^2 f_1(5) = -0,1385 \cdot 10^{-3} - (-0,1436 \cdot 10^{-3}) = 0,5083 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta^3 f_1(6) = \Delta^2 f_1(7) - \Delta^2 f_1(6) = -0,1337 \cdot 10^{-3} - (-0,1385 \cdot 10^{-3}) = 0,4818 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta^3 f_1(7) = \Delta^2 f_1(8) - \Delta^2 f_1(7) = -0,1291 \cdot 10^{-3} - (-0,1337 \cdot 10^{-3}) = 0,4571 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta^3 f_1(8) = \Delta^2 f_1(9) - \Delta^2 f_1(8) = -0,1248 \cdot 10^{-3} - (-0,1291 \cdot 10^{-3}) = 0,4340 \cdot 10^{-5};$$

- Se calculează diferențele finite de ordinul 4:

$$\Delta^4 f_1(1) = \Delta^3 f_1(2) - \Delta^3 f_1(1) = 0,6006 \cdot 10^{-5} - 0,6363 \cdot 10^{-5} = -0,3568 \cdot 10^{-6};$$

$$\Delta^4 f_1(2) = \Delta^3 f_1(3) - \Delta^3 f_1(2) = 0,5675 \cdot 10^{-5} - 0,6006 \cdot 10^{-5} = -0,3306 \cdot 10^{-6};$$

$$\Delta^4 f_1(3) = \Delta^3 f_1(4) - \Delta^3 f_1(3) = 0,5368 \cdot 10^{-5} - 0,5675 \cdot 10^{-5} = -0,3068 \cdot 10^{-6};$$

$$\Delta^4 f_1(4) = \Delta^3 f_1(5) - \Delta^3 f_1(4) = 0,5083 \cdot 10^{-5} - 0,5368 \cdot 10^{-5} = -0,2851 \cdot 10^{-6};$$

$$\Delta^4 f_1(5) = \Delta^3 f_1(6) - \Delta^3 f_1(5) = 0,4818 \cdot 10^{-5} - 0,5083 \cdot 10^{-5} = -0,2652 \cdot 10^{-6};$$

$$\Delta^4 f_1(6) = \Delta^3 f_1(7) - \Delta^3 f_1(6) = 0,4571 \cdot 10^{-5} - 0,4818 \cdot 10^{-5} = -0,2471 \cdot 10^{-6};$$

$$\Delta^4 f_1(7) = \Delta^3 f_1(8) - \Delta^3 f_1(7) = 0,4340 \cdot 10^{-5} - 0,4571 \cdot 10^{-5} = -0,2305 \cdot 10^{-6};$$

- Se aplică relația (11.8) pentru calculul derivatei de ordinul 1:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h} \left(\Delta f_1 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_1 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_1 - \frac{1}{4} \Delta^4 f_1 \right) = \\ &= \frac{1}{1} \left(0,0086 - \frac{1}{2} (-0,1670 \cdot 10^{-3}) + \frac{1}{3} (0,6363 \cdot 10^{-5}) - \frac{1}{4} (-0,3568 \cdot 10^{-6}) \right) \\ &= 0,008685883965952 \end{aligned}$$

Utilizând valorile exactă și aproximativă, în final se poate calcula eroarea procentuală de aproximare:

$$e_r^{\%} = \frac{0,008685839 - 0,008685889}{0,008685889} \cdot 100 = -6,53 \cdot 10^{-5} [\%]$$

11. 3. Desfășurarea lucrării

- Se studiază textul lucrării.

2. Se studiază fișierul funcție *deriv_pol_newton* dezvoltat în limbajul Matlab prezentat în Anexa 2.
3. Se testează funcția Matlab *deriv_pol_newton* folosind exemplul numeric prezentat în paragraful 2.
4. Se soluționează următoarele aplicații folosind derivarea numerică bazată pe polinoame de tip Newton.

$$f(x) = \ln x$$

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

Rezolvarea se va face manual, iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcției *deriv_pol_newton* dezvoltată în Matlab.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele și condițiile în care au fost obținute.

