

LUCRAREA 12

INTEGRAREA NUMERICĂ

12.1. Obiectivele lucrării

Integrarea numerică se folosește atunci când primitiva $F(x)$ a unei integrale fie are o expresie complexă, fie nu poate fi determinată pe căi elementare, respectiv în cazul în care funcția $f(x)$ este definită printr-un număr de puncte determinate experimental și trebuie determinată expresia unei funcții $F(x)$ care să aproximeze cât mai bine funcția $f(x)$. O parte dintre metodele utilizate se bazează pe descompunerea intervalului de integrare într-o serie de subintervale mai înguste, valoarea integralei definite rezultând ca sumă a ariilor aproximative ale fâșiilor obținute. Metodele de integrare numerică se diferențiază prin: numărul punctelor considerate, localizarea lor în intervalul de integrare și modul de determinare a valorilor ariilor aproximative ale fâșiilor obținute.

În cadrul lucrării va fi prezentat modul de aproximare a integralei unei funcții $f(x)$, utilizând două dintre cele mai utilizate metode: metoda trapezelor și metoda Simpson. Rezolvarea se va efectua prin calcul manual și cu funcțiile Matlab *met_trapezelor* și *met_simpson* construite în Matlab. Se va efectua o analiză a rezultatelor obținute și a condițiilor în care au rezultat.

12.2. Aspecte teoretice

12.2.1. Generalități

În formularea cea mai generală a problemei, se consideră funcția reală $y = f(x)$, continuă pe intervalul $[a, b]$, pentru care există primitiva $F(x)$.

Integrala definită a funcției $f(x)$ între limitele a și b se poate calcula cu formula Newton-Leibnitz:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ unde } F'(x) = f(x) \quad (12.1)$$

Există numeroase situații în care primitiva $F(x)$ fie are o expresie complexă, fie nu poate fi determinată pe căi elementare, sau funcția $f(x)$ este definită printr-un număr de puncte determinate experimental sau utilizând altă cale.

Integrala definită este numeric egală cu aria suprafeței delimitată de graficul funcției $y = f(x)$ și axa abscisei, între limitele de integrare, Fig. 12.1.

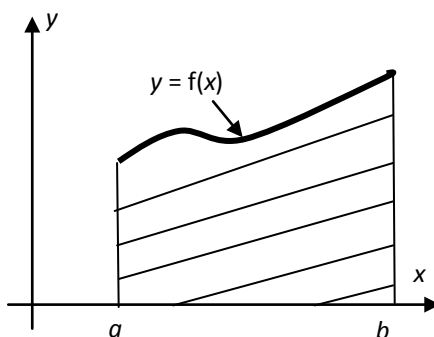


Fig. 12.1. Semnificația geometrică a integralei definite

Marea majoritate a metodele de integrare descompun intervalul $[a, b]$ în subintervale mai înguste, astfel încât în final suma ariilor aproximative ale fiecărui subinterval furnizează valoarea integralei definite. Relațiile care stau la baza acestor metode au forma generală:

$$I \approx \sum_k I_k \quad (12.2)$$

acestea purtând denumirea de formule de integrare numerică.

Metodele de integrare numerică se diferențiază între ele prin numărul de puncte considerate, prin localizarea lor în intervalul $[a, b]$ și prin modul de determinare a valorilor I_k , $k = 1, \dots, n$. Metodele cele mai folosite în practică sunt metoda trapezelor și metoda Simpson, acestea făcând parte din categoria metodelor de cuadratură în care

localizarea sau/și lungimea intervalelor se stabilesc în cursul aplicării algoritmului, pe baza unei analize care permite asigurarea unei precizii cât mai bune.

Dacă se consideră integrala definită de relația (12.1), iar intervalul $[a, b]$ se decompune în subintervale $[x_k, x_{k+1}]$ cu noduri echidistante,

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} = b \quad (12.3)$$

cu pasul $h = x_{k+1} - x_k$, $k = 1, \dots, n$, atunci valoarea acesteia se poate calcula cu formula:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=1}^n I_k \quad (12.4)$$

12.2.2. Integrarea numerică folosind metoda trapezelor

În cadrul acestei metode aproximarea funcției $f(x)$ pe fiecare interval elementar $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, \dots, n$, se face printr-un polinom Newton de interpolare de gradul 1:

$$f(x) = y_k + \frac{\Delta y_k}{1!h}(x - x_k) \quad (12.5)$$

unde $h = x_{k+1} - x_k$ este pasul rețelei formată din nodurile echidistante, iar $y_k = f(x_k)$.

Ținând cont de expresia (12.5), integralele elementare I_k pot fi scrise sub forma:

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[y_k + \frac{\Delta y_k}{1!h}(x - x_k) \right] dx \quad (12.6)$$

Valoarea integralei (12.6) va fi:

$$I_k = \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1}) \quad (12.7)$$

În final, înlocuind relația (12.7) în relația (12.4) aceasta devine:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left(y_a + y_b + 2 \sum_{k=2}^{n-1} y_k \right) \quad (12.8)$$

unde: $y_a = f(a)$ și $y_b = f(b)$.

Relația (12.8) poartă denumirea de formula trapezelor.

Eroarea totală de aproximare este dată de relația:

$$e_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\epsilon) \quad (12.9)$$

Din relația (12.9) se poate observa că valoarea erorii de aproximare a integralei pe un interval $[a, b]$ este cu atât mai mică cu cât numărul de intervale elementare, n , este mai mare.

12.2.3. Integrarea numerică folosind metoda Simpson

Spre deosebire de metoda trapezelor care folosește un polinom Newton de interpolare de ordinul 1, metoda Simpson apelează la aproximația funcției $y = f(x)$ pe fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$ printr-un polinom Newton de interpolare de gradul 2.

Datorită utilizării unui polinom de interpolare de gradul 2, metoda Simpson necesită o divizare a intervalelor de integrare într-un număr par de subintervale $n = 2 \cdot p$. Pentru această divizare, integrarea elementelor I_k se face pe 2 subintervale succesive, adică $[x_k, x_{k+2}]$.

Astfel, valoarea aproximării integralei I_k pe subintervalul considerat este:

$$I_k = \frac{h}{3} (y_k + 4y_{k+1} + y_{k+2}) \quad (12.10)$$

În final, valoarea aproximativă a integralei definite pe intervalul $[a, b]$, ținând cont de relația (12.10) este:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[y_a + y_b + 4 \cdot \sum_{k=1}^p y_{2k} + 2 \cdot \sum_{k=2}^p y_{2k-1} \right] \quad (12.11)$$

Relația (12.11) reprezintă formula Simpson de calcul a integralelor definite folosind polinoame Newton de interpolare de gradul 2.

În cazul în care funcția $f(x)$ este definită tabelar, adică se cunosc valorile $f(x_k)$, $k = 1, \dots, n$, în nodurile rețelei de integrare, relația (12.11) devine:

$$I \cong \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad (12.12)$$

Eroarea de aproximare în cazul formulei Simpson este proporțională cu derivata de ordinul patru a funcției integrant într-un punct din interiorul intervalului $[a, b]$:

$$e_T(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{IV}(\xi) \quad (12.13)$$

Eroarea de aproximare folosind formula Simpson este mai mică decât cea din formula trapezelor, dar rămâne încă relativ mare.

Exemplu numeric

Să se estimeze valoarea integralei definite $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ folosind formula trapezelor și

Simpson cu $n = 4$. Valoarea exactă a integralei este:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = 0,6931 - 0,0000 = 0,6931$$

Rezolvare folosind formula trapezelor

Valoarea aproximativă a integralei se obține plecând de la următoarele date de intrare:

$$y = f(x) = \frac{1}{x}; \quad x_0 = a = 1; \quad x_n = b = 2; \quad n = 4$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

În continuare se aplică următorul algoritm:

$$x_0 = a = 1, \quad y_0 = \frac{1}{x_0} = 1$$

$$x_1 = a + h = \frac{5}{4}, \quad y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = a + 2 \cdot h = \frac{6}{4}, \quad y_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{4}{6}$$

$$x_3 = a + 3 \cdot h = \frac{7}{4}, \quad y_3 = \frac{1}{x_3} = \frac{4}{7}$$

$$x_4 = a + 4 \cdot h = 2, \quad y_4 = \frac{1}{x_4} = \frac{1}{2}$$

Înlocuind expresiile de mai sus în relația (12.8) se obține:

$$I = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{4}{5} + \frac{4}{6} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{4} = 0,6970$$

Utilizând valorile exactă și aproximativă, în final se poate calcula eroarea procentuală de aproximare:

$$e_r^{\%} = \frac{0.6970 - 0.6931}{0.6931} \cdot 100 = 0,5627[\%]$$

Rezolvare folosind formula Simpson

Folosind formula Simpson, valoarea aproximativă a integralei se obține plecând de la următoarele date de intrare:

$$y = f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 1; \quad b = 2; \quad n = 4; \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

În continuare se aplică următorul algoritm:

$$x_0 = a = 1,00000 \quad y_0 = \frac{1}{x_0} = 1,00000$$

$$x_1 = a + h = 1,25000 \quad y_1 = \frac{1}{x_1} = 0,80000$$

$$x_2 = a + 2 \cdot h = 1,50000 \quad y_2 = \frac{1}{x_2} = 0,66667$$

$$x_3 = a + 3 \cdot h = 1,75000 \quad y_3 = \frac{1}{x_3} = 0,57143$$

$$x_4 = a + 4 \cdot h = 2,00000 \quad y_4 = \frac{1}{x_4} = 0,50000$$

Înlocuind expresiile de mai sus în relația (12.11) se obține:

$$I = \frac{1}{12} \cdot (1,00000 + 4 \cdot 0,800000 + 2 \cdot 0,66667 + 4 \cdot 0,57143 + 0,50000) = 0,69325$$

Utilizând valorile exactă și aproximativă, în final se poate calcula eroarea procentuală de aproximare:

$$e_r^{\%} = \frac{0,69325 - 0,6931}{0,6931} \cdot 100 = 0,021[\%]$$

Prin aplicarea celor două metode (trapezelor și Simpson) se poate observa că eroarea de aproximare este mai mică în cazul metodei Simpson.

11. 3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se studiază fișierele funcție *met_trapezelor* și *met_simpson* construite în Matlab, prezentate în Anexa 2, și funcțiile conținute în Matlab pentru rezolvarea numerică a integralelor prezentate în Anexa 1.
3. Se testează fișierele funcție *met_trapezelor* și *met_simpson* folosind exemplul numeric prezentat în paragraful 2.
4. Se soluționează următoarele aplicații folosind integrarea numerică bazată pe metodele trapezelor și Simpson.

$$f(x) = x \cdot \sin(x); x \in [5,8].$$

$$f(x) = e^x - x^2; x \in [2,4].$$

$$f(x) = \cos(x) - \sin(x); x \in [\pi/9, \pi].$$

Rezolvarea se va face manual, iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcțiilor construite în Matlab *met_trapezelor* și *met_simpson*.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele obținute și condițiile în care au rezultat.
6. Aplicațiile de la punctul 4 vor fi rezolvate cu ajutorul funcțiilor pentru soluționarea numerică a derivatelor conținute de Matlab.