

LUCRAREA 13

VECTORI ȘI VALORI PROPRII

13.1. Obiectivele lucrării

În aplicațiile practice din diverse domenii, valorile și vectorii proprii au anumite semnificații fizice, dependente de natura problemei analizate. În cele mai multe situații prezintă interes următoarele cazuri: determinarea tuturor valorilor proprii și a vectorilor proprii corespunzători, determinarea unei valori proprii și a vectorului propriu corespunzător (valoarea proprie cea mai mare sau cea mai mică în modul, primele câteva valori proprii, în ordinea descrescătoare sau crescătoare a modulelor), determinarea valorilor proprii și a vectorilor proprii pentru matrice hermitiene reale (matrice reale simetrice), respectiv localizarea valorilor proprii, în planul complex sau pe axa reală, fără determinarea lor explicită.

Cerințele lucrării se referă la determinarea valorilor pentru calculul valorilor și vectorilor proprii folosind unele dintre cele mai utilizate metode: metoda puterii directe și metoda puterii inverse. Rezolvarea se va efectua prin calcul manual și cu funcțiile construite în Matlab *met_put_inverse* și *met_put_directe*. Se va efectua o analiză a rezultatelor obținute și a condițiilor în care au rezultat.

13.2. Aspecte teoretice

13.2.1. Generalități

Se consideră o matrice A de dimensiune $n \times n$. Dacă pentru această matrice se folosește un vector X de dimensiune n , aplicarea transformării liniare reprezentată prin matricea A vectorului X conduce la un nou vector Y , astfel încât:

$$A \cdot X = Y \quad (13.1)$$

În general, între vectorii X și Y nu există o relație bine definită, ei putând fi doi vectori oarecare. Pentru matricea A există însă anumiți vectori X care sunt transformați în vectori Y coliniari cu vectorul inițial. Astfel, pentru matricea A există cel puțin n vectori (unde n reprezintă rangul matricei) pe care transformarea liniară îi lasă invariți ca direcție. Cu alte cuvinte se poate scrie relația:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \quad (13.2)$$

Relația (13.2) stă la baza definirii valorilor și vectorilor proprii. În această relație, factorul de proporționalitate λ se numește valoare proprie a matricei A , iar vectorul X se numește vector propriu al acestei matrice.

Relația (13.2) poate fi scrisă într-o formă echivalentă:

$$A \cdot X = \lambda \cdot I_n \cdot X \quad (13.3)$$

unde I_n este matricea unitatea de ordinul n .

Sistemul liniar omogen rezultat din relația (13.3),

$$(A - \lambda \cdot I_n) X = 0 \quad (13.4)$$

admite o soluție nenulă X dacă și numai dacă $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.

Polinomul $P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ se numește polinom caracteristic al matricei A . Orice matrice cu coeficienți complecși are exact n valori proprii (reale sau complexe, nu neapărat distincte). Acestea sunt rădăcinile polinomului caracteristic. Rădăcinile polinoamelor de grad mai mare ca patru nu pot fi întotdeauna calculate într-un număr finit de pași. Polinomul caracteristic $P(\lambda)$ are coeficienții $c_1, \dots, c_{n+1}$ care depind de elementele matricei A .

Dacă se definește matricea X de dimensiune $n \times n$, având pe coloane vectorii proprii $(x_1, \dots, x_n)$, atunci cele n sisteme de forma (13.3), obținute prin înlocuirea a câte unei valori proprii λ_i și a vectorului propriu x_i , se pot restrânge astfel:

$$A \cdot X = X \cdot \Lambda \quad (13.5)$$

unde Λ este matricea diagonală a valorilor proprii numită și forma canonică diagonală a matricei A .

O altă formă canonică a matricei A este *forma canonică Schur*. Astfel, dacă pentru matricea A reală, de dimensiune $n \times n$, există o matrice ortogonală $\tilde{Q}$, de asemenea reală, atunci matricea S (cunoscută sub denumirea de *forma canonică Schur*), definită cu ajutorul relației:

$$S = \tilde{Q}^t \cdot A \cdot \tilde{Q} \quad (13.6)$$

este cvasi superior triunghiulară. Aceasta înseamnă că matricea S este bloc superior triunghiulară cu blocuri pe diagonală de ordin cel mult doi, fiecare bloc de ordin doi având valori proprii complexe conjugate.

Forma canonică Schur prezintă un interes aparte în calculul valorilor și vectorilor proprii, deoarece pe diagonala matricei se găsesc valorile proprii reale ale matricei A iar blocurile de ordinul doi conțin valorile proprii complex conjugate.

Polinomul și ecuația caracteristică sugerează cea mai naturală formă de determinare a valorilor proprii ale matricei A . Aceasta constă în rezolvarea ecuației caracteristice, ceea ce este echivalent cu determinarea zerourilor polinomului caracteristic. Dar, din punct de vedere al calcului numeric, această modalitate este total neeconomică (pentru determinarea celor $n+1$ coeficienți c_i sunt efectuate un număr de înmulțiri de ordinul n^n). Pe de altă parte, însăși problema rezolvării ecuației caracteristice după calculul coeficienților c_i este rău condiționată. Astfel, variații relativ mici în valorile coeficienților, care pot fi introduse de erorile de rotunjire, pot determina abateri semnificative ale zerourilor calculate în raport cu zerourile exacte. Din acest motiv, în practică se folosesc alte tipuri de metode, în principal metodele iterative, care construiesc un șir de aproximații succesive. Aceste metode au în plus avantajul de a determina simultan perechi *valoare proprie – vector propriu*.

Dintre metodele cele mai folosite în acest scop sunt tehnicile iterative cunoscute sub denumirile de metoda puterii directe și metoda puterii inverse.

13.2.2. Metoda puterii inverse

Metoda puterii inverse este o metodă iterativă simplă care permite determinarea valorii proprii minimă în valoare absolută și a vectorului propriu asociat ei.

Ipoteza care stă la baza metodei se referă la proprietatea conform căreia dacă λ este o valoare proprie a matricei A , atunci $1/\lambda$ va fi o valoare proprie a inversei A^{-1} . În aceste condiții dacă λ_1 este valoare proprie minimă în valoare absolută pentru matricea A , atunci $1/\lambda_1$ este valoare proprie dominantă pentru matricea A^{-1} .

Pașii algoritmului asociat acestei metode sunt următorii:

1. Se consideră un vector inițial $W^{(0)}$, ales arbitrar, astfel încât să aibă o componentă în direcția lui X_1 . Vectorul $W^{(0)}$ reprezintă o aproximație a vectorului propriu X_1 . Pentru a îndeplini această condiție, se va genera vectorul $W^{(0)}$ aleatoriu.
2. Se rezolvă sistemul:

$$A \cdot Z^{(k+1)} = W^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (13.7)$$

pentru a determina vectorul $Z^{(k+1)}$ folosind factorizarea LU . Factorizarea se face o singură dată, iar sistemul se rezolvă succesiv cunoscând valorile vectorului $W^{(k)}$, $k > 0$, din membrul drept.

3. Se determină norma $\|Z^{(k+1)}\|$;
4. Se calculează:

$$W^{(k+1)} = \frac{Z^{(k+1)}}{\|Z^{(k+1)}\|} \quad (13.8)$$

și se repetă pașii 2 – 4 până în momentul în care este îndeplinit criteriul de convergență:

$$\left| W^{(k+1)} - W^{(k)} \right| \leq \varepsilon \quad (13.9)$$

unde ε este fixat la începutul procesului iterativ.

La finalul algoritmului se obține:

$$\|Z\| = \pm \frac{1}{\lambda_1}; \quad W = X_1 \quad (13.10)$$

Semnul lui X_1 se determină astfel:

- dacă Z își modifică semnul între două iterații succesive, atunci λ_1 este negativ;
- dacă Z își păstrează semnul între două iterații succesive, atunci λ_1 este pozitiv.

Viteza de convergență a acestei metode poate fi îmbunătățită printr-o tehnică numită *deplasarea valorii proprii (eigenvalue shifting)*.

Astfel, dacă se consideră:

$$\lambda = \lambda^* + s \quad (13.11)$$

unde s reprezintă deplasarea, problema inițială a determinării valorilor proprii se transformă în:

$$A \cdot X = (\lambda^* + s) \cdot X \quad (13.12)$$

sau

$$A^* \cdot X = \lambda^* \cdot X \quad (13.13)$$

unde:

$$A^* = A - s \cdot I \quad (13.14)$$

Prin rezolvarea ecuației matriceale (13.13) folosind metoda puterii inverse se obține valoarea proprie λ_1^* , respectiv vectorul propriu X_1 , unde λ_1^* reprezintă valoarea proprie minimă a matricei A^* . Valoarea proprie corespunzătoare problemei inițiale,

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + s \quad (13.15)$$

reprezintă astfel valoarea proprie cea mai apropiată de s .

Pentru a putea obține o accelerare a vitezei de convergență trebuie introdusă o deplasare s astfel încât raportul $\lambda_1^* / \lambda_2^*$ să fie cât mai mic. Deoarece

$$\lambda_1^* = \lambda_1 - s \quad (13.16)$$

se poate alege s având o valoare apropiată de λ_1 .

Metoda puterii inverse cu deplasarea valorii proprii reprezintă una dintre cele mai performante metode, având capacitatea de a ajunge la soluție în puține iterații dacă se dispune de o localizare relativ precisă a valorilor proprii.

13.2.3. Metoda puterii directe

Această metodă este asemănătoare ca metodologie cu metoda puterii inverse, cu deosebirea că de această dată se determină valoarea proprie dominantă în valoare absolută și vectorul propriu asociat ei. Diferența dintre cele două metode constă în schimbarea vectorilor W și Z în relația (13.7).

Pașii algoritmului asociat acestei metode sunt următorii:

1. Se consideră un vector inițial $W^{(0)}$, ales arbitrar, astfel încât să aibă o componentă în direcția lui X_n . Vectorul $W^{(0)}$ reprezintă o aproximație a vectorului propriu X_n . Pentru a îndeplini această condiție, se va genera vectorul $W^{(0)}$ aleatoriu.
2. Se rezolvă sistemul:

$$Z^{(k+1)} = A \cdot W^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (13.17)$$

3. Se determină norma $\|Z^{(k+1)}\|$;
4. Se calculează:

$$W^{(k+1)} = \frac{Z^{(k+1)}}{\|Z^{(k+1)}\|} \quad (13.18)$$

și se repeată pașii 2 – 4 până în momentul în care este îndeplinit criteriul de convergență:

$$\left| W^{(k+1)} - W^{(k)} \right| \leq \varepsilon \quad (13.19)$$

unde ε este fixat la începutul procesului iterativ.

La finalul algoritmului se obține:

$$\|Z\| = \pm \lambda_n; \quad W = X_n \quad (13.20)$$

Semnul lui X_n se determină în același mod ca în cadrul metodei puterii inverse.

Exemple numerice**Exemplul 1**

Se consideră o matrice reală A , pătrată și simetrică:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Să se determine valoarea proprie minimă în valoare absolută și vectorul ei propriu folosind metoda puterii inverse și metoda puterii inverse cu deplasarea valorii proprii.

Inițializarea parametrilor de intrare: vectorul propriu $W^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]_t$, eroarea maximă $\epsilon = 10^{-6}$, numărul maxim de iterații $N_{max} = 50$, deplasarea $s = 0$.

*Metoda puterii inverse***Iterația 1**

$$Z^{(1)} = A^{-1} \cdot W^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0462 \\ 0,0971 \\ 0,8235 \end{bmatrix}$$

$$|Z^{(1)}| = \sqrt{0,0462^2 + 0,0971^2 + 0,8235^2} = 0,8305$$

$$W^{(1)} = \frac{Z^{(1)}}{|Z^{(1)}|} = \begin{bmatrix} 0,0462 \\ 0,0971 \\ 0,8235 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{0,8305} = \begin{bmatrix} 0,0556 \\ 0,1170 \\ 0,9916 \end{bmatrix}$$

Iterația 2

$$Z^{(2)} = A^{-1} \cdot W^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,0556 \\ 0,1170 \\ 0,9916 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,3704 \\ 0,9302 \\ -0,4622 \end{bmatrix}$$

$$|Z^{(2)}| = \sqrt{(-1,3704)^2 + (0,9302)^2 + (-0,4622)^2} = 1,7196$$

$$W^{(2)} = \frac{Z^{(2)}}{|Z^{(2)}|} = \begin{bmatrix} -1,3704 \\ 0,9302 \\ -0,4622 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1,7196} = \begin{bmatrix} -0,7969 \\ 0,5410 \\ -0,2688 \end{bmatrix}$$

Iterația 19

$$Z^{(19)} = A^{-1} \cdot W^{(18)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -0,5266 \\ 0,6071 \\ -0,5951 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,4997 \\ 1,7288 \\ -1,6946 \end{bmatrix}$$

$$|Z^{(19)}| = \sqrt{(-1,4997)^2 + (1,7288)^2 + (-1,6946)^2} = 2,8477$$

$$W^{(19)} = \frac{Z^{(19)}}{|Z^{(19)}|} = \begin{bmatrix} -1,4997 \\ 1,7288 \\ -1,6946 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2,8477} = \begin{bmatrix} -0,5266 \\ 0,6071 \\ -0,5951 \end{bmatrix}$$

Criteriul de convergență (13.9) este îndeplinit în iterația 19, obținându-se pentru valoarea proprie minimă în valoare absolută și vectorul propriu asociat ei următoarele aproximații:

$$\lambda_1 = -0,3512; \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0,5266 \\ -0,6071 \\ 0,5951 \end{bmatrix}.$$

Metoda puterii inverse cu deplasarea valorii proprii.

Pentru accelerarea convergenței se alege o valoare a deplasării $s = -0,5$.

$$A^* = A - s \cdot I = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - (-0,5) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 & 4 & 2 \\ 4 & 9,5 & 6 \\ 2 & 6 & 4,5 \end{bmatrix}$$

Iterația 1

$$Z^{(1)} = (A^*)^{-1} \cdot W^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,5 & 4 & 2 \\ 4 & 9,5 & 6 \\ 2 & 6 & 4,5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3353 \\ 0,2992 \\ 0,4526 \end{bmatrix}$$

$$|Z^{(1)}| = \sqrt{0,3353^2 + 0,2992^2 + 0,4526^2} = 0,6378$$

$$W^{(1)} = \frac{Z^{(1)}}{|Z^{(1)}|} = \begin{bmatrix} 0,3353 \\ 0,2992 \\ 0,4526 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{0,6378} = \begin{bmatrix} 0,5257 \\ 0,4691 \\ 0,7096 \end{bmatrix}$$

Iterația 2

$$Z^{(2)} = (A^*)^{-1} \cdot W^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,5 & 4 & 2 \\ 4 & 9,5 & 6 \\ 2 & 6 & 4,5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,5257 \\ 0,4691 \\ 0,7096 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4893 \\ -1,6418 \\ 1,6849 \end{bmatrix}$$

$$|Z^{(2)}| = \sqrt{1,4893^2 + (-1,6418)^2 + 1,6849^2} = 2,7843$$

$$W^{(2)} = \frac{Z^{(2)}}{|Z^{(2)}|} = \begin{bmatrix} 1,4893 \\ -1,6418 \\ 1,6849 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2,7843} = \begin{bmatrix} 0,5349 \\ -0,5897 \\ 0,6051 \end{bmatrix}$$

Iterația 6

$$Z^{(6)} = (A^*)^{-1} \cdot W^{(5)} = \begin{bmatrix} 2,5 & 4 & 2 \\ 4 & 9,5 & 6 \\ 2 & 6 & 4,5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,5266 \\ -0,6071 \\ 0,5951 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,5383 \\ -4,0788 \\ 3,9981 \end{bmatrix}$$

$$|Z^{(6)}| = \sqrt{3,5383^2 + (-4,0788)^2 + 3,9981^2} = 6,7187$$

$$W^{(6)} = \frac{Z^{(6)}}{|Z^{(6)}|} = \begin{bmatrix} 3,5383 \\ -4,0788 \\ 3,9981 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6,7187} = \begin{bmatrix} 0,5266 \\ -0,6071 \\ 0,5951 \end{bmatrix}$$

Criteriul de convergență este îndeplinit în iterația 6, obținându-se pentru valoarea proprie minimă în valoare absolută și vectorul propriu asociat ei următoarele aproximații:

$$\lambda_1 = -0,3512; \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0,5266 \\ -0,6071 \\ 0,5951 \end{bmatrix}.$$

Exemplul 2

Se consideră o matrice reală A , pătrată și simetrică:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se determine valoarea proprie dominantă în valoare absolută și vectorul propriu asociat ei folosind metoda puterii directe.

Inițializarea parametrilor de intrare: vectorul propriu $W^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]_t$, eroarea maximă $\epsilon ps = 10^{-6}$, numărul maxim de iterații $N_{max} = 50$.

Iterația 1

$$Z^{(1)} = A \cdot W^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|Z^{(1)}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = 5,3852$$

$$W^{(1)} = \frac{Z^{(1)}}{|Z^{(1)}|} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5,3852} = \begin{bmatrix} 0,5571 \\ 0,3714 \\ 0,7428 \end{bmatrix}$$

Iterația 2

$$Z^{(2)} = A \cdot W^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5571 \\ 0,3714 \\ 0,7428 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,3852 \\ 9,6562 \\ 5,5709 \end{bmatrix}$$

$$|Z^{(2)}| = \sqrt{5,3852^2 + 9,6562^2 + 5,5709^2} = 12,3805$$

$$W^{(2)} = \frac{Z^{(2)}}{|Z^{(2)}|} = \begin{bmatrix} 5,3852 \\ 9,6562 \\ 5,5709 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{12,3805} = \begin{bmatrix} 0,435 \\ 0,780 \\ 0,450 \end{bmatrix}$$

Iterația 13

$$Z^{(13)} = A \cdot W^{(12)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,3217 \\ 0,7952 \\ 0,5140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,6114 \\ 11,398 \\ 7,3672 \end{bmatrix}$$

$$|Z^{(13)}| = \sqrt{4,6114^2 + 11,398^2 + 7,3672^2} = 14,3337$$

$$W^{(13)} = \frac{Z^{(13)}}{|Z^{(13)}|} = \begin{bmatrix} 4,6114 \\ 11,398 \\ 7,3672 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{14,3337} = \begin{bmatrix} 0,3217 \\ 0,7952 \\ 0,5140 \end{bmatrix}$$

Criteriul de convergență este îndeplinit în iterația 13, obținându-se pentru valoarea proprie dominantă în valoare absolută și vectorul propriu asociat ei următoarele aproximații:

$$\lambda_n = 14,3337; \quad X_n = \begin{bmatrix} 0,3217 \\ 0,7952 \\ 0,5140 \end{bmatrix}.$$

13.3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.

2. Se vor studia funcțiile pentru determinarea vectorilor și valorilor proprii conținute de limbajul Matlab prezentate în Anexa 1.
3. Se studiază și se testează funcțiile construite în Matlab *met_put_inverse* și *met_put_directe*, prezentate în Anexa 2, folosind exemplele numerice din paragraful 2.
4. Să se calculeze valorile și vectorii proprii cu ajutorul metodelor puterii directe și inverse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Rezolvarea se va face manual, iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcțiilor Matlab *met_put_inverse* și *met_put_directe*.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele obținute și condițiile în care au rezultat.
6. Aplicațiile de la punctul 4 vor fi rezolvate cu ajutorul funcțiilor pentru determinarea vectorilor și valorilor proprii implementate în limbajul Matlab.