

LUCRAREA 14

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

14.1. Obiectivele lucrării

Ecuatiile diferențiale care conțin ca necunoscute funcții ce depind de o singură variabilă independentă se întâlnesc în mod curent în descrierea fenomenelor din practică. În cadrul acestor ecuații apar derivatele de diverse ordine ale funcțiilor necunoscute. Ordinul cel mai mare al derivatei funcției necunoscute va determina ordinul ecuației diferențiale. În general, acestea nu pot fi soluționate pe cale analitică, prin metode clasice, din cauza formei complexe a funcțiilor care definesc expresiile derivatelor sau datorită faptului că nu se cunoaște expresia lor, ele fiind definite "prin puncte". Astfel, singura alternativă pe care o avem la dispoziție este rezolvarea numerică.

Cerințele lucrării se referă la soluționarea numerică a ecuațiilor diferențiale utilizând metodele directe: Taylor, Euler și Runge-Kutta. Aceste metode determină soluția aproximativă folosind o relație de recurență prin intermediul căreia aproximația într-un punct curent este determinată numai în funcție de aproximația din pasul anterior. Rezolvarea se va efectua prin calcul manual și cu funcțiile construite în Matlab *met_Taylor*, *met_Euler* și *met_RK*. Se va efectua o analiză a rezultatelor obținute și a condițiilor în care au rezultat.

14.2. Aspecte teoretice

14.2.1. Generalități

O ecuație diferențială poate fi definită de relația:

$$y' = f(x, y) \quad (14.1)$$

Funcția $f(x, y)$ din relația (14.1) se mai numește și funcție pantă, deoarece în punctul de coordonate (x, y) valoarea ei este egală cu valoarea derivatei de ordinul întâi a funcției $y(x)$, numeric egală cu panta tangentei la graficul funcției în acest punct.

Pentru a determina complet soluția trebuie să se furnizeze și o condiție suplimentară:

$$y(x_0) = y_0 \quad (14.2)$$

Rezolvarea unei asemenea ecuații presupune determinarea unei expresii corespunzătoare funcției y , dependentă de variabila independentă x :

$$y = y(x) \quad (14.3)$$

Metodele numerice de rezolvare a ecuației diferențiale (14.1) pornesc din punctul de coordonate (x_0, y_0) precizat de condiția inițială (14.2) și determină un șir de puncte (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots$, care descriu sub formă numerică soluția problemei. În funcție de modul în care se construiește șirul de aproximații succesive (x_k, y_k) , se disting două categorii principale de metode: *metode numerice directe* (Euler, Taylor și Runge-Kutta) care determină soluția aproximativă folosind o relație de recurență prin intermediul căreia aproximația în punctul curent y_k este determinată numai în funcție de aproximația din pasul anterior y_{k-1} , respectiv *metode numerice indirecte* (predictor-corector), care determină aproximația y_k în funcție de aproximația din mai multe iterații precedente y_{k-1}, y_{k-2} , etc.

În continuare sunt prezentate metodele numerice directe ale căror algoritm are un volum de calcul redus și se pretează la implementarea ușoară pe calculator pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale.

14.2.2. Metoda Taylor

În general, înaintea aplicării metodei Taylor se procedează la o eșantionare a intervalului de studiu de forma: $x_0, x_1, x_2, \dots$. Această eșantionare poate fi uniformă (când punctele $x_k, k = 1, 2, \dots$, sunt egal depărtate între ele) sau oarecare (când punctele $x_k, k = 1, 2, \dots$, sunt depărtate aleatoriu între ele).

Metoda apelează la dezvoltarea în serii Taylor a funcției y în jurul unui punct oarecare x_k :

$$y(x) = y_k + \frac{(x - x_k)}{1!} y'_k + \frac{(x - x_k)^2}{2!} y''_k + \dots \quad (14.4)$$

Dezvoltarea în serii Taylor de forma (14.4) sugerează posibilitatea aproximării funcției y într-un punct oarecare x din vecinătatea lui x_k , în cazul în care se cunoaște valoarea funcției y și a derivatelor sale în acel punct x_k . Toate derivatele parțiale din expresia dezvoltării în serii Taylor pot fi calculate numeric folosind funcția f care definește ecuația diferențială.

Pentru a asigura o precizie cât mai ridicată este necesar să se considere un număr cât mai mare de termeni din dezvoltarea în serii Taylor, ceea ce înseamnă un număr cât mai mare de derivate ale funcției y . Precizia metodei Taylor este afectată de două tipuri de erori:

- eroarea introdusă de punctul de pornire x_k ;
- eroarea determinată de trunchierea dezvoltării în serii Taylor.

Primul tip de eroare apare pentru toate punctele de divizare a intervalului de calcul, cu excepția punctului inițial x_0 . În acest punct, valoarea funcției y este cunoscută în mod precis, fiind indicată de condiția inițială a problemei. Eroarea de trunchiere rezultă prin neglijarea termenilor de rang superior lui p , unde p reprezintă rangul ultimului termen luat în considerare din seria Taylor.

Datorită acestor erori, metoda Taylor se caracterizează printr-o precizie relativ redusă. În plus, volumul calculului necesar estimării derivatelor funcției y este mare.

14.2.3. Metoda Euler

Metoda Euler reprezintă un caz particular al metodei Taylor care, deși este mai puțin performantă din punct de vedere al volumului de calcul, oferă o imagine clară a modului de aproximare corespunzător funcției y . Metoda Euler este o metodă de ordinul 1 și consideră numai primii doi termeni din dezvoltarea în serii Taylor.

Relația care stă la baza metodei are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_k = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \quad (14.6)$$

14.2.4. Metode de tip Runge-Kutta

Metodele Runge-Kutta de rezolvare a ecuațiilor diferențiale liniare prezintă multe aspecte care le aseamănă cu metoda Euler.

În cadrul metodelor Runge-Kutta se caută o formulă de soluționare care să depindă de funcția $f(x, y)$, dar nu și de derivatele sale:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y \quad (14.7)$$

Relația de recurență (14.7) poate fi scrisă și sub forma:

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{i=1}^p \omega_i \cdot k_i \quad (14.8)$$

unde:

p – reprezintă ordinul metodei;

ω_k – coeficienți ale căror valori urmează a fi determinate;

k_i – reprezintă expresii care conțin produsul dintre pasul de divizare a intervalului de studiu, h , și valorile funcției f calculate în diferite puncte din vecinătatea punctelor (x_k, y_k) :

$$\begin{aligned} k_i &= h \cdot f(\zeta_i, \eta_i) \\ \zeta_i &= x_k + \alpha_i \cdot h \\ \eta_i &= y_k + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \cdot k_j \end{aligned} \quad (14.9)$$

În relațiile (14.9) coeficienții α_i și β_i urmează să fie determinați.

Dacă pentru toate cazurile se consideră următoarele valori: $\alpha_1 = 0$, $\beta_{11} = 0$, $\zeta_1 = x_k$ și $\eta_1 = y_k$ se obține:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k) \\ k_2 &= h \cdot f(x_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_{21} k_1) \\ k_3 &= h \cdot f(x_k + \alpha_3 h, y_k + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) \\ &\dots \end{aligned} \quad (14.10)$$

Particularitatea unei anumite metode de tip Runge-Kutta rezultă din precizia ordinului p și din modul de determinare a coeficienților α , β și ω . Acești coeficienți se determină impunând condiția ca pentru un ordin dat p , dezvoltarea în serii Taylor care conține toți termenii până la rangul p inclusiv să coincidă cu formula de recurență corespunzătoare respectivelor metode Runge-Kutta.

În continuare sunt prezentate câteva cazuri particulare ale metodei Runge-Kutta.

a. Metoda Runge-Kutta de ordinul 1 ($p = 1$)

În acest caz relația de recurență (14.8) poate fi scrisă sub forma:

$$y_{k+1} = y_k + \omega_1 \cdot k_1 = y_k + \omega_1 \cdot h \cdot f(x_k, y_k) \quad (14.11)$$

Dacă $\omega_1 = 1$, atunci relația (14.11) devine:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_k = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \quad (14.12)$$

b. Metoda Runge-Kutta de ordinul 2 ($p = 2$)

În acest caz relația de recurență (14.8) poate fi scrisă sub forma:

$$y_{k+1} = y_k + \omega_1 \cdot k_1 + \omega_2 \cdot k_2 \quad (14.13)$$

Dacă pentru k_1 și k_2 se utilizează relațiile de calcul:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x_k, y_k) \\ k_2 = h \cdot f(x_k + h, y_k + k_1) \end{cases} \quad (14.14)$$

și se impune a priori valoarea:

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{2} \quad (14.15)$$

atunci relația (14.13) devine:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} h \cdot f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)) \quad (14.16)$$

c. Metoda Runge-Kutta de ordinul 1 ($p = 4$)

În acest caz relația de recurență (14.8) poate fi scrisă sub forma:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (14.17)$$

unde:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x_k, y_k) \\ k_2 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + k_3) \end{cases} \quad (14.18)$$

Putem spune astfel că metodele Runge-Kutta sunt metode cu viteză mare de convergență, deoarece calculul unui punct curent de pe curba soluției se face numai cu valorile calculate la punctul precedent. Totuși, precizia acestor metode depinde de eroarea de trunchiere.

Exemple numerice

Exemplul 1

Se consideră ecuația diferențială ordinară:

$$y'(x) = 3y(x), \quad y(1) = y_0 = 1$$

Se cere să se soluționeze numeric ecuația diferențială pentru $x \in [1, 2]$ cu metoda Euler.

Rezolvare

Ecuția diferențială de mai sus ne conduce la următoarea soluție analitică:

$$y(x) = x^3$$

Soluționarea se va face utilizând valoarea $h = 0,25$, ceea ce înseamnă că $n = 4$.

Iterația 0

$$y'(x_0) = y'_0 = f(x_0, y_0) = f(1, 1) = 3 \cdot 1 = 3$$

Iterația 1

$$x_1 = 1 + 0,25 = 1,25; \quad y_1 = y_0 + h \cdot y'_0 = 1 + 0,25 \cdot 3 = 1,75$$

$$y'(x_1) = y'_1 = f(x_1, y_1) = f(1,25, 1,75) = 3 \cdot 1,75 = 5,25$$

Iterația 2

$$x_2 = 1,25 + 0,25 = 1,50; \quad y_2 = y_1 + h \cdot y'_1 = 1,75 + 0,25 \cdot 5,25 = 3,0625$$

$$y'(x_2) = y'_2 = f(x_2, y_2) = f(1,5, 3,0625) = 3 \cdot 3,0625 = 9,1875$$

Iterația 3

$$x_3 = 1,5 + 0,25 = 1,75; \quad y_3 = y_2 + h \cdot y'_2 = 3,0625 + 0,25 \cdot 9,1875 = 5,3594$$

$$y'(x_3) = y'_3 = f(x_3, y_3) = f(1,75, 5,3594) = 3 \cdot 5,3594 = 16,0781$$

Iterația 4

$$x_4 = 1,75 + 0,25 = 2,00; \quad y_4 = y_3 + h \cdot y'_3 = 5,3594 + 0,25 \cdot 16,0781 = 9,3789$$

$$y'(x_4) = y'_4 = f(x_4, y_4) = f(2,00, 9,3789) = 3 \cdot 9,3789 = 28,1367$$

Exemplul 2

Se consideră ecuația diferențială ordinară:

$$y'(x) = 2y(x) - 5x, \quad y(0) = y_0 = 1,5$$

Se cere determinarea soluției ecuației diferențiale în punctul $x = 1,5$ utilizând

metoda Runge-Kutta.

Soluționarea se va face utilizând valoarea $h = 0,25$, ceea ce înseamnă că $n = 6$.

Rezolvare

În primul pas se determină numărul segmentelor și coordonatele punctelor x_i cu relația: $x_{i+1} = x_i + h \cdot i$ începând cu $x_i = 0$.

$$\{x_i\} = (x_0=0; x_1=0,25; x_2=0,5; x_3=0,75; x_4=1,00; x_5=1,25; x_6=1,5)$$

Iterația 1

Utilizând condiția inițială $x_0 = 0, y_0 = 1,5$ se determină prima aproximare :

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \text{ unde } \Delta y_0 = \frac{1}{6} (k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})$$

În continuare se determină valoarea coeficienților în punctul $x_0 = 0$:

$$k_1^{(0)} = (2 \cdot y_0 - 5 \cdot x_0) \cdot h = 3 \cdot 0,25 = 0,750$$

$$k_2^{(0)} = \left[\left(2 \cdot y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2} \right) - \left(5 \cdot x_0 + \frac{h}{2} \right) \right] \cdot h = [(3 + 0,375) - 0,125] \cdot 0,25 = 0,7813$$

$$k_3^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2} \right) - \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right] \cdot h = [(3 + 0,39065) - 0,125] \cdot 0,25 = 0,7891$$

$$k_4^{(0)} = \left[(y_0 + k_3^{(0)}) - (x_0 + h) \right] \cdot h = [(3 + 0,7891) - 0,25] \cdot 0,25 = 0,8320$$

Astfel,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0,750 + 2 \cdot 0,7813 + 2 \cdot 0,7891 + 0,8320) = 0,7877$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,5 + 0,7877 = 2,2871$$

Iterația 2

Utilizând condiția $y_1 = 2,2871$ și $x_1 = 0,25$ se determină cea de-a doua aproximare:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1, \text{ unde } \Delta y_1 = \frac{1}{6} (k_1^{(1)} + 2 \cdot k_2^{(1)} + 2 \cdot k_3^{(1)} + k_4^{(1)})$$

Pentru această aproximare se determină valoarea coeficienților în punctul $x_1 = 0,25$:

$$k_1^{(1)} = (2 \cdot y_1 - 5 \cdot x_1) \cdot h = (2 \cdot 2,2871 - 5 \cdot 0,25) \cdot 0,25 = 0,8311$$

$$k_2^{(1)} = \left[\left(2 \cdot y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2} \right) - \left(5 \cdot x_1 + \frac{h}{2} \right) \right] \cdot h = 0,8826$$

$$k_3^{(1)} = \left[\left(2 \cdot y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2} \right) - \left(5 \cdot x_1 + \frac{h}{2} \right) \right] \cdot h = 0,8954$$

$$k_4^{(1)} = \left[\left(2 \cdot y_1 + k_3^{(1)} \right) - \left(5 \cdot x_1 + h \right) \right] \cdot h = 0,9663$$

Astfel,

$$\Delta y_1 = 0,8922$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 2,2871 + 0,8922 = 3,1793$$

Iterația 3

$$\Delta y_2 = 1,0655; \quad y_3 = 4,2448$$

Iterația 4

$$\Delta y_3 = 1,3512; \quad y_4 = 5,5960$$

Iterația 5

$$\Delta y_4 = 1,822; \quad y_5 = 7,4180$$

Iterația 6

$$\Delta y_5 = 2,5982; \quad y_6 = 3,9950 + 0,7458 = 10,0162$$

Soluția căutată este: $y(x = 1,5) = 10,0162$.

14. 3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se vor studia funcțiile pentru soluționarea ecuațiilor diferențiale conținute de limbajul Matlab prezentate în Anexa 1.

3. Se studiază și se testează funcțiile construite în Matlab *met_Taylor*, *met_Euler* și *met_RK*, prezentate în Anexa 2, folosind exemplele numerice din în paragraful 2.
4. Se soluționează următoarele aplicații cu ajutorul metodelor Taylor, Euler și Runge-Kutta:

$$y' = 2 \cdot x \cdot y - 1; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_n = 1$$

$$y' = x^2 - y^2; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_n = 1$$

$$y' = x^2 \cdot y + y; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_n = 1$$

Rezolvarea se va face manual, iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcțiilor construite în Matlab *met_Taylor*, *met_Euler* și *met_RK*.

5. Aplicațiile de la punctul 4 vor fi rezolvate cu ajutorul funcțiilor pentru soluționarea numerică a ecuațiilor diferențiale implementate în limbajul Matlab.