

LUCRAREA 2

APROXIMAREA FUNCȚIILOR FOLOSIND INTERPOLAREA POLINOMIALĂ

2.1. Obiectivele lucrării

În cadrul lucrării sunt prezentate cele mai utilizate metode de aproximare numerică a unei funcții, în situația în care aceasta nu are o expresie analitică cunoscută, dată sub formă tabelară prin puncte.

Problema aproximării pornește de la o funcție $f(x)$ pentru care se încearcă determinarea expresiei unei funcții de aproximare $F(x)$. Astfel, în cadrul lucrării se va considera o funcție reală $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și un număr n de puncte $x_1, x_2, \dots, x_n$ din intervalul de definiție $[a, b]$, pentru care se cunosc valorile $f(x_k)$, $k = 1, \dots, n$. Determinarea expresiei funcției $F(x)$ se face astfel încât, pe domeniul de definiție, cele două funcții să se abată cât mai puțin una față de cealaltă.

Cerințele lucrării se referă la aproximarea numerică a funcțiilor date sub formă tabelară utilizând interpolarea polinomială, respectiv aproximațiile de tip Lagrange și Newton. Rezolvarea se va face prin calcul manual și cu ajutorul funcțiilor Matlab *aprox_polinomiala* și *aprox_Newton*. Se va efectua o comparație a rezultatelor obținute și a condițiilor în care au rezultat.

2.2. Aproximarea numerică prin interpolare polinomială

În cadrul interpolării polinomiale expresia funcției de aproximare $F(x)$ se determină impunând condiția coincidenței cu funcția $f(x)$ în punctele de definiție, adică:

$$F(x_k) = f_k \quad (\forall) k = 0, \dots, n \quad (2.1)$$

Punctele x_k ($k = 0, \dots, n$) în care se cunosc valorile funcției $f(x)$ se numesc noduri de interpolare, iar mulțimea lor $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ formează suportul de interpolare. Deoarece funcția $F(x)$ este imaginea analitică a funcției $f(x)$, operația de aproximare poartă numele de interpolare și nu are soluție unică deoarece prin $(n + 1)$ puncte $(x_k, f(x_k))$ se pot trasa o infinitate de curbe.

În cazul interpolării polinomiale funcția de aproximare $F(x)$ are următoarea expresie generală:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.2)$$

În cazul expresiei (2.2) se pune problema determinării valorii coeficienților a_k ($k = 0, \dots, n$) din condiția de interpolare, adică a rezolvării sistemului de ecuații liniare:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Sistemul (2.3) poate fi scris sub o formă restrânsă, matriceală, astfel:

$$[V][A] = [f] \rightarrow [A] = [V]^{-1}[f] \quad (2.4)$$

unde V este matricea Vandermonde.

Deoarece nodurile de interpolare x_k sunt distincte, sistemul de ecuații (2.4) este un sistem cu determinant Vandermonde diferit de zero cu o soluție unică, bine determinată pentru coeficienții a_k . În consecință, oricare ar fi calea utilizată în scopul construirii polinomului de interpolare (2.2), acesta este unic pentru o funcție și o diviziune dată. Aproximarea efectuată este o interpolare globală, în sensul că se folosește un singur polinom pentru tot intervalul de definiție, $[x_0, x_n]$, corespunzător funcției $f(x)$.

Exemplu numeric

Se consideră o funcție reală $f(x)$, pentru care se cunosc valorile în 4 puncte echidistante ale intervalului $[0, 3]$, cu pasul de discretizare $h = 1$.

x	0	1	2	3
$f(x)$	-5	-6	-1	16

Să se calculeze coeficienții polinomului care aproximează funcția $f(x)$ pe întreg intervalul de definiție $[0, 3]$. Verificarea rezultatelor obținute se va face folosind fișierul funcție Matlab *aprox_polinomiala*.

Rezolvare

Funcția $f(x)$ fiind definită în patru noduri de interpolare, polinomul de interpolare va avea gradul 3, având următoarea expresie generală:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Pentru a determina coeficienții polinomului trebuie să se rezolve sistemul:

$$[A] = [V]^{-1}[f]$$

$$\begin{bmatrix} -0.1667 & 0.5000 & -0.5000 & 0.1667 \\ 1.0000 & -2.5000 & 2.0000 & -0.5000 \\ -1.8333 & 3.0000 & -1.5000 & 0.3333 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ -1 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

În final expresia polinomului de interpolare are următoarea formă:
 $F(x) = -5 - 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$

2.3. Aproximarea numerică cu polinoame de interpolare Lagrange

Pentru aproximarea funcției $f(x)$, se construiește un polinom de interpolare de forma:

$$F_L(x) = \sum_{k=1}^n f_k \cdot L_k(x) \quad (2.5)$$

unde:

$$L_k(x) = \frac{x-x_1}{x_k-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_k-x_2} \cdots \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \cdots \frac{x-x_n}{x_k-x_n} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}, \quad k=1, \dots, n \quad (2.6)$$

De exemplu, dacă $n = 2$, interpolarea este reprezentată de o linie dreaptă:

$$F_L(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) \quad (2.7)$$

unde:

$$L_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}; \quad L_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad (2.8)$$

Pentru cazul $n = 3$, interpolarea este reprezentată de o parabolă:

$$F_L(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x) \quad (2.9)$$

unde:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_3)}{(x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3)} \quad (2.10)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_3)}{(x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3)} \quad (2.11)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_3-x_1) \cdot (x_3-x_2)} \quad (2.12)$$

Exemplu numeric

Se consideră funcția $f(x)$ pentru care se cunosc valorile în 3 puncte echidistante ale intervalului de definiție $[1, 3]$, cu pasul de discretizare al intervalului $h=1,5$.

x	1	1,5	3
$f(x)$	2	2,5	4

Să se determine expresia și valoarea funcției de aproximare $F_L(x)$ care corespunde punctului $x = 2$, folosind interpolarea cu polinoame Lagrange.

Verificarea rezultatelor obținute folosind fișierul funcție Matlab *aprox_lagrange*.

Rezolvare

Relațiile (2.9) – (2.12) pot fi folosite pentru a determina expresia funcției de aproximare care trece prin toate punctele de interpolare:

$$\begin{aligned} F_L(x) &= \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_3)}{(x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3)} \cdot f_1 + \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_3)}{(x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3)} \cdot f_2 + \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_3-x_1) \cdot (x_3-x_2)} \cdot f_3 = \\ &= \frac{(x-1.5) \cdot (x-3)}{(1-1.5) \cdot (1-3)} \cdot 2 + \frac{(x-1) \cdot (x-3)}{(1.5-1) \cdot (1.5-3)} \cdot 2.5 + \frac{(x-1) \cdot (x-1.5)}{(3-1) \cdot (3-1.5)} \cdot 4 \\ &= 2(x^2 - 4.5x + 4.5) - \frac{10}{3}(x^2 - 4x + 3) + \frac{4}{3}(x^2 - 2.5x + 1.5) \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

Astfel, pentru valoarea $x = 2$ funcția de aproximare $F_L(x = 2) = 3$.

Secvența de program corespunzătoare afișării rezultatelor în Matlab este următoarea:

```
>> x = [1 1.5 3]; y = [2 2.5 4]; xi = 2;
>> [L,yi] = aprox_lagrange(x, y, xi);

L =
    -0.5000    1.3333    0.1667

yi =
    3.0000
```

2.4. Aproximarea cu polinoame de interpolare Newton

O aproximare mai bună a funcției $f(x)$ față de aproximarea cu polinoame de tip Lagrange poate fi obținută dacă se utilizează aproximarea cu polinoame de interpolare

Newton. Polinomul de interpolare Newton de grad n poate fi scris folosind următoarea formă generală:

$$N_n(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)(x - x_1)a_2 + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})a_n \quad (2.13)$$

Pentru determinarea relației care stă la baza determinării coeficienților polinomului $N_n(x)$ se vor utiliza diferențele finite. Există mai multe tipuri de diferențe finite: directe ("la dreapta" sau "înainte"), inverse ("la stânga" sau "înapoi") și simetrice ("centrale"). În continuare se va face referire doar cele finite directe ("la dreapta" sau "înainte"). Expresia diferențelor finite directe de ordinul i ($i = 1, \dots, n$) este:

$$\Delta^i f(x_k) = \Delta^{i-1} f(x_{k+1}) - \Delta^{i-1} f(x_k) \quad k = 0, \dots, n - k \quad (2.14)$$

Ca exemplu, în Tabelele 2.1 (tabel orizontal) și 2.2 (tabel diagonal) sunt prezentate diferențele finite directe pentru cinci noduri de interpolare consecutive.

Tabelul 2.1. Tabel orizontal de diferențe finite finite directe

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

Tabelul 2.2. Tabel diagonal de diferențe finite directe

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Astfel, pe baza diferențelor finite, coeficienții polinomului Newton (2.14) pot fi determinați utilizând relația:

$$a_n = \frac{\Delta^{n-1} f(x_1) - \Delta^{n-1} f(x_0)}{x_n - x_0} \quad (2.15)$$

Exemplu numeric

Se consideră o funcție reală $f(x)$ pentru care se cunosc valorile în 5 puncte ale intervalului $[-2, 4]$. Să se aproximeze funcția $f(x)$ cu un polinom de interpolare de tip Newton.

x	-2	-1	1	2	4
$f(x)$	-6	0	0	6	60

Verificarea rezultatelor obținute folosind fișierul funcție Matlab *aprox_newton*.

Rezolvare

Pentru punctele în care funcția $f(x)$ este definită se construiește tabelul de diferențe finite.

Tabelul diferențelor finite

x_k	y_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$
-2	-6	$\frac{0 - (-6)}{-1 - (-2)} = 6$	$\frac{0 - 6}{1 - (-2)} = -2$	$\frac{2 - (-2)}{2 - (-2)} = 1$	$\frac{1 - 1}{4 - (-2)} = 0$
-1	0	$\frac{0 - 0}{1 - (-1)} = 0$	$\frac{6 - 0}{2 - (-1)} = 2$	$\frac{7 - 2}{4 - (-1)} = 1$	-
1	0	$\frac{6 - 0}{2 - 1} = 6$	$\frac{27 - 6}{4 - 1} = 7$	-	-
2	6	$\frac{60 - 6}{4 - 2} = 27$	-	-	-
4	60	-	-	-	-

În continuare, utilizând rezultatele specificate în tabel și relația (2.13) se determină expresia polinomului Newton care aproximează funcția $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 N(x) &= y_0 + \Delta f_0(x - x_0) + \Delta^2 f_0(x - x_0)(x - x_1) + \Delta^3 f_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + 0 \\
 &= -6 + 6(x - (-2)) - 2(x - (-2))(x - (-1)) + 1(x - (-2))(x - (-1))(x - 1) \\
 &= -6 + 6(x + 2) - 2(x + 2)(x + 1) + (x + 2)(x^2 - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^3 + (-2 + 2)x^2 + (6 - 6 - 1)x - 6 + 12 - 4 - 2 \\
 &= x^3 - x
 \end{aligned}$$

Secvența de program corespunzătoare afișării rezultatelor în Matlab este următoarea:

```

x=[-2  -1  1  2  4]; f = [-6  0  0  6  60];
[a,D] = aprox_newton(x,f);

a =
    0    1    0   -1    0
D =
   -6    0    0    0    0
    0    6    0    0    0
    0    0   -2    0    0
    6    6    2    1    0
   60   27    7    1    0

```

2.5. Desfășurarea lucrării

1. Se va studia textul lucrării.
2. Se vor studia funcțiile pentru aproximarea numerică a funcțiilor bazată pe interpolarea polinomială implementate în limbajul Matlab prezentate în Anexa 1.
3. Se testează funcțiile Matlab *aprox_polinomiala*, *aprox_lagrange* și *aprox_Newton* prezentate în Anexa 2, folosind exemplele numerice prezentate în paragraful 2.
4. Fie funcțiile $f(x)$ definite tabelar:

x	1	2	3
$f(x)$	-2	1	2

x	1	3	4	5
$f(x)$	2	3	1	4

Se cere:

- Gradul polinomului de interpolare.
- Condițiile de interpolare.
- Sistemul de ecuații asociat în cazul metodei de aproximare prin interpolare polinomială.

- Determinatul de tip Vandermonde al funcțiilor.
- Tabelul de diferențe finite
- Expresiile polinoamele de tip Lagrange și Newton care aproximează funcțiile.
- Valoarea funcțiilor în punctul $x = 1,75$.

5. Se consideră funcția $f(x)$ definită tabelar:

x	0	3.14	4.71	6.28
$f(x)$	0	0	-1	0

Se cere:

- Determinatul de tip Vandermonde asociat funcției.
- Valorile diferențelor finite de ordinul întâi și doi.
- Valoarea funcției în punctul $x=1,57$ determinată cu ajutorul celor trei metode de interpolare polinomială prezentate în partea teoretică.
- Să se compare rezultatele obținute.
- Să se prezinte avantajele și dezavantajele fiecărei metode în parte.

6. Se consideră funcția $f(x)$ definită tabelar:

x	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	0.423	0.684	1.03	1.557

Să se determine valoarea funcției în punctul $x=0,73$, știind că $f(x)=\operatorname{tg} x$.

Rezolvarea se va face manual iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcțiilor implementate în Matlab *aprox_polinomiala*, *aprox_lagrange* și *aprox_Newton*.

7. Să se determine expresia polinomului de interpolare Lagrange pentru următoarele funcții definite tabelar:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0	-1

x	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x)$	1	0	-1	0

8. Aplicațiile de la punctul 4, 5, 6 și 7 vor fi rezolvate cu ajutorul funcțiilor implementate în Matlab prezentate în Anexa 1.