

LUCRAREA 3

APROXIMAREA FUNCȚIILOR FOLOSIND METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

3.1. Obiectivele lucrării

În cadrul lucrării se prezintă metoda celor mai mici pătrate folosită în aproximarea numerică a unei funcții $f(x)$ dată sub formă tabelară. Această metodă determină expresia funcției de aproximare $F(x)$ impunând condiția ca suma pătratelor distanțelor dintre funcția care se aproximează $f(x)$ și cea de aproximare $F(x)$ în nodurile de interpolare să fie minimă. Este prezentat algoritmul numeric asociat metodei pentru cazul general (pentru o valoare oarecare a lui n) și pentru cazul particular $n = 1$, unde n reprezintă numărul nodurilor de interpolare.

Cerințele lucrării se referă la aproximarea numerică a funcțiilor date sub formă tabelară utilizând metoda celor mai mici pătrate. Rezolvarea va fi efectuată prin calcul manual și cu funcția Matlab *aprox_regres*. Se va efectua o analiză a rezultatelor și a condițiilor în care au fost obținute.

3.2. Aspecte teoretice

3.2.1. Modelarea matematică a criteriului celor mai mici pătrate

Modelarea matematică a criteriului celor mai mici pătrate poate fi exprimată cu ajutorul relației:

$$S = \min \left(\sum_{k=0}^n (f(x_k) - F(x_k))^2 \right) = \min \left(\sum_{k=0}^n (f_k - F(x_k))^2 \right) \quad (3.1)$$

În relația (3.1) S reprezintă funcția obiectiv, aceasta reprezentând suma pătratelor abaterilor între valorile funcțiilor $f(x)$ și $F(x)$ în nodurile de interpolare $x_k, k=0, \dots, n$.

În funcție de forma funcției de aproximare $F(x)$ se pot întâlni următoarele tipuri de regresie: polinomială, exponențială, logaritmică etc. Dintre formele funcției $F(x)$, pentru majoritatea fenomenelor din practică, cea mai întâlnită este regresia polinomială. În continuare, se prezintă regresia polinomială pentru cazul general (pentru o valoare oarecare a lui n) și pentru cazul particular $n = 1$.

3.2.2. Regresia polinomială

Pentru o funcție de aproximare dată sub forma unui polinom,

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p = \sum_{i=0}^p a_i x^i \quad (3.2)$$

expresia funcției obiectiv S devine:

$$S = \min \left(\sum_{k=0}^n \left(f_k - \sum_{i=0}^p (a_i x_k^i) \right)^2 \right) \quad (3.3)$$

Cea mai simplă și utilizată metodă de minimizare a funcției S este cea a anulării derivatelor parțiale corespunzătoare funcției obiectiv în raport cu necunoscutele problemei. În cazul regresiei polinomiale necunoscutele sunt reprezentate de coeficienții $a_i, i = 0, \dots, p$, din expresia funcției de aproximare $F(x)$. Acești coeficienți trebuie determinați astfel încât să se asigure obținerea unei valori minime pentru funcția S .

În urma anulării derivatelor parțiale în raport cu necunoscutele $a_i, i = 0, \dots, p$, se obține:

$$\sum_{i=0}^p a_i \sum_{k=0}^n x_k^{i+j} = \sum_{k=0}^n f_k x_k^j \quad j = 0, \dots, p \quad (3.4)$$

Astfel, se ajunge la un sistem de $(p + 1)$ ecuații liniare cu $(p + 1)$ necunoscute, de forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} na_0 + \sum_{k=0}^n a_1 x_k + \dots + \sum_{k=0}^n a_p x_k^p = \sum_{k=0}^n f_k \\ \sum_{k=0}^n x_k a_0 + \sum_{k=0}^n a_1 x_k^2 + \dots + \sum_{k=0}^n a_p x_k^{p+1} = \sum_{k=0}^n f_k x_k \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \sum_{k=0}^n x_k^p a_0 + \sum_{k=0}^n a_1 x_k^{p+1} + \dots + \sum_{k=0}^n a_p x_k^{2p} = \sum_{k=0}^n f_k x_k^p \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} a_0 + \bar{x}a_1 = \bar{f} \\ a_0\bar{x} + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n x_k^2\right)a_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n x_k f_k \end{cases} \quad (3.8)$$

unde $\bar{x}$ și $\bar{f}$ reprezintă valorile medii ale lui x și f .

După rezolvarea sistemului (3.8) rezultă valorile coeficienților a_0 și a_1 :

$$a_0 = \frac{\bar{f} \sum_{k=0}^n x_k^2 - \bar{x} \sum_{k=0}^n x_k f_k}{\sum_{k=0}^n x_k^2 - n\bar{x}^2}; \quad a_1 = \frac{\sum_{k=0}^n x_k f_k - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{f}}{\sum_{k=0}^n x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2} \quad (3.9)$$

Relațiile (3.9) sunt sensibile la erorile de rotunjire. Din acest motiv, determinarea coeficienților a_0 și a_1 poate fi făcută cu ajutorul următoarelor relații:

$$a_1 = \frac{\sum_{k=0}^n f_k (x_k - \bar{x})}{\sum_{k=0}^n x_k (x_k - \bar{x})}; \quad a_0 = \bar{f} - \bar{x}a_1 \quad (3.10)$$

Exemplu numeric

Se consideră o funcție reală $f(x)$ pentru care se cunosc valorile în 4 puncte echidistante ale intervalului $[0, 4]$, cu pasul de discretizare $h = 1$.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	3,5	4	4,5	5

Să se aproximeze în sensul celor mai mici pătrate datele rezultate folosind regresia liniară. Să se verifice rezultatele obținute folosind fișierul funcție Matlab *aprox_regres*.

Rezolvare

Se calculează mediile datelor:

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum x_k = \frac{0+1+2+3+4}{5} = 2; \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \sum y_k = \frac{3+3,5+4+4,5+5}{5} = 4$$

Se calculează coeficienții a_0 și a_1 relațiile (3.10):

$$a_1 = \frac{\sum y_k (x_k - \bar{x})}{\sum x_k (x_k - \bar{x})} = \frac{3 \cdot (-2) + 3,5 \cdot (-1) + 4 \cdot (0) + 4,5 \cdot (1) + 5 \cdot (2)}{0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (0) + 3 \cdot (1) + 4 \cdot (2)} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$a_0 = \bar{y} - \bar{x}a_1 = 4 - 2 \cdot 0,5 = 3$$

În final, funcția de aproximare $F(x)$ are expresia:

$$F(x) = 3 + 0,5 \cdot x$$

3.3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se va studia funcția Matlab *aprox_regres* construită în Matlab pentru aproximarea numerică a funcțiilor date sub formă tabelară în sensul celor mai mici pătrate prezentată în Anexa 2.
3. Se testează funcția Matlab *aprox_regres* 2 folosind exemplul din paragraful 2.
4. Se consideră următoarele funcții definite sub formă tabelară:

x	0	1	3	4	5
f(x)	2,42	5,37	8,20	9,61	9,74

x	0	1	3	4	5
f(x)	1,45	1,65	2,36	4,88	10,88

x	0	1	3	4	5
f(x)	2,12	3,67	3,94	5,59	5,77

x	0	1	3	4	5
f(x)	8,08	8,66	10,79	13,47	14,43

x	0	1	3	4	5
f(x)	1,43	3,70	5,20	10,67	19,40

x	0	1	3	4	5
f(x)	2,55	5,85	7,36	9,45	15,88

Să se aproximeze în sensul celor mai mici pătrate folosind polinoame de gradul 1, 3, 5 și 7. Rezolvarea se va face manual pentru cazul $n = 1$ iar pentru celelalte polinoame se va utiliza funcția *aprox_regres*.

5. Se vor reprezenta grafic rezultatele obținute și se vor trage concluzii în legătură cu calitatea diverselor polinoame de aproximare.