

LUCRAREA 4

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE

PARTEA I

4.1. Obiectivele lucrării

În cadrul lucrării se vor studia două dintre cele mai utilizate metode de rezolvare numerică a ecuațiilor algebrice de tipul $f(x) = 0$: metoda înjumătățirii intervalului și metoda aproximațiilor succesive. Aceste metode se bazează pe ipoteza inițială conform căreia s-a realizat în prealabil separarea rădăcinilor într-un interval $[a, b]$. Aplicarea metodelor se va face pentru cazul particular al funcțiilor reale, dar ele pot fi aplicate și pentru cazul general al funcțiilor complexe.

Rezolvarea ecuațiilor algebrice se va efectua atât prin calcul manual, dar și cu ajutorul fișierelor funcție implementate în Matlab. După determinarea valorii soluțiilor, se vor formula concluzii privind rezultatele obținute.

4.2. Aspecte teoretice

4.2.1. Principiile determinării soluțiilor ecuațiilor algebrice

Se consideră o funcție $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru această funcție, ecuația $f(x) = 0$ se numește ecuație algebrică dacă funcția f are forma unui polinom sau poate fi adusă la această formă în urma unor transformări. În caz contrar, ecuația se numește transcendentă.

Pentru funcția definită mai sus, o valoare $\delta \in [a, b]$ se numește zerou al funcției sau rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ dacă $f(\delta) = 0$. Din punct de vedere al calcului numeric

rezolvarea unei ecuații algebrice presupune determinarea aproximativă a tuturor rădăcinilor $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in [a, b]$.

Determinarea rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ presupune parcurgerea a două etape:

- *Separarea rădăcinilor.* În cadrul acestei etape sunt determinate intervale elementare $[a_i, b_i]$ care au proprietatea că $\delta_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$.
- *Determinarea aproximărilor celor n rădăcini.* În această etapă se calculează aproximările celor n rădăcini care se găsesc în fiecare dintre intervalele elementare, determinate în prima etapă. Acest calcul se realizează prin aproximări succesive, după modelele specifice fiecărei metode aplicate. Procesul de aproximări succesive trebuie să se oprească în momentul în care rădăcinile aproximative, notate cu δ' , se găsesc suficient de aproape de rădăcina exactă δ . Acest aspect poate fi exprimat în două forme:

$$|\delta' - \delta| \leq \varepsilon_1 \quad (4.1)$$

$$|f(\delta')| \leq \varepsilon_2 \quad (4.2)$$

unde ε_1 și ε_2 sunt numere pozitive foarte mici, impuse inițial.

Din punct de vedere al criteriului aproximațiilor succesive, există metode pentru care cele două condiții sunt echivalente, dar și metode pentru care nu sunt echivalente. În cazul acestei ultime categorii de metode, aplicarea algorimilor va stabili drept condiție de oprire una din cele două prezentate, (4.1) sau (4.2), în funcție de caracteristicile problemelor analizate.

4.2.2. Metode de aproximare a rădăcinilor

4.2.2.1. Metoda înjumătățirii intervalului (biseției)

Fie o funcție $f(x)$, continuă pe un interval finit închis $[a, b]$, care are două valori $f(a)$ și $f(b)$ definite astfel încât produsul lor să îndeplinească condiția:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad (4.3)$$

În continuare, se face ipoteza conform căreia s-a realizat în prealabil izolarea unei rădăcini δ în intervalul menționat. Determinarea soluției constă în înjumătățirea succesivă a intervalelor de incertitudine până în momentul în care se obține o valoare care să aproximeze, cu o eroare acceptată, rădăcina δ , Fig. 4.1.

Considerând $x_m = (a + b)/2$, se va înjumătăți intervalul $[a, b]$, selectându-se din cele două subintervale acela care conține soluția. În acest scop, se determină semnul valorii $f(x_m)$, iar în funcție de acesta se modifică în consecință $a = x_m$ sau $b = x_m$, astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$. Șirul valorilor succesive ale lui x_m este convergent către soluția exactă x . Procedura iterativă de înjumătățire se oprește atunci când lungimea intervalului $|b - a|$ devine mai mică decât eroarea impusă soluției.

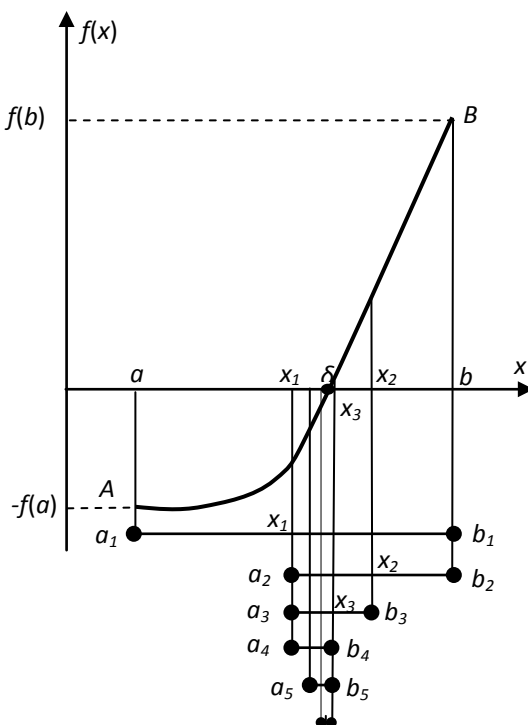


Fig. 4.1. Determinarea soluției aproximative cu ajutorul metodei înjumătățirii intervalului

4.2.2.2. Metoda aproximațiilor succesive

Specific metodei aproximațiilor succesive este faptul că ecuația inițială $f(x) = 0$ se înlocuiește cu o ecuație echivalentă de forma:

$$x = g(x) \quad (4.5)$$

Termenul de echivalență se referă la faptul că cele două ecuații au aceeași rădăcină. În acest caz rezolvarea ecuației presupune, din punct de vedere grafic, determinarea punctului de intersecție a curbelor $y = x$ și $y = g(x)$, Fig. 4.2.

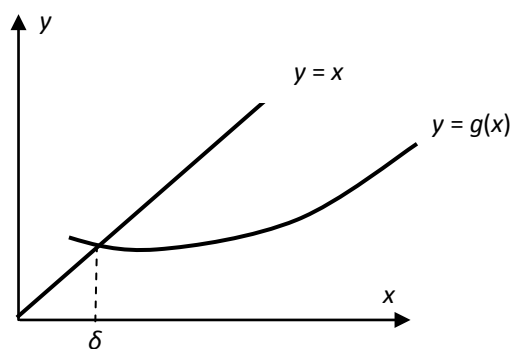


Fig. 4.2. Reprezentarea grafică a modului de rezolvare a ecuației $x = g(x)$

Toate metodele de aproximare succesivă pornesc de la o aproximare inițială x_0 , căreia îi sunt aplicate corecții succesive care au la bază o relație de recurență de forma:

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad (4.6)$$

unde $i = 0, 1, \dots, n$, iar n reprezintă numărul iterațiilor.

Rezultă un șir al aproximațiilor succesive, $\{x\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, care poate fi:

- convergent, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \delta$, unde δ este valoarea precisă a rădăcinii corespunzătoare ecuației $x = g(x)$ sau a ecuației $f(x) = 0$, care este una și aceeași;
- divergent, dacă nu există limita șirului $\{x\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$. În această situație ecuația $f(x) = 0$ nu poate fi rezolvată.

Din punct de vedere al opririi procesului iterativ, aceasta are loc atunci când este satisfăcută condiția:

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon \quad (4.7)$$

unde ε reprezintă o valoare suficient de mică asociată preciziei de aproximare.

De exemplu, dacă se folosește o funcție $g(x)$ care să aibă forma

$$g(x) = x + f(x), \quad (4.8)$$

și relația de recurență (4.6), se poate stabili o condiție care să asigure convergența șirului de aproximații succesive. Aceasta poate fi obținută dacă se apelează la dezvoltarea în serii Taylor a funcției $g(x)$, în jurul rădăcinii exacte δ , din care se rețin primii doi termeni. În final se obține următoarea expresie:

$$x_{i+1} = g(\delta) + (x_i - \delta) \cdot g'(\delta) \quad (4.9)$$

Pentru ca șirul aproximațiilor succesive să fie convergent este necesar ca, de la o iterație la alta, abaterile aproximațiilor față de rădăcina exactă (e_i , respectiv e_{i+1}) să se micșoreze, adică:

$$|e_i| > |e_{i+1}| \rightarrow |g'(\delta)| < 1 \quad (4.10)$$

În practică verificarea unei condiții de tipul (4.10) este dificilă deoarece rădăcina exactă δ este ea însăși necunoscută. Din acest motiv convergența sau divergența procesului de calcul poate fi controlată prin indicarea unui număr maxim de iterații.

Exemple numerice

Exemplul 1

Folosind metoda biseției să se determine rădăcina ecuației:

$$f(x) = x^3 - 10 \cdot x^2 + 5,$$

cu o eroare $\varepsilon = 10^{-5}$, știind că aceasta se găsește în intervalul $[0,6, 0,8]$.

Rezolvare

Pasul 1. Se calculează valoarea funcției în punctele extreme ale intervalului (a, b) :

$$f(0,6) = 0,6^3 - 10 \cdot 0,6^2 + 5 = 1,616;$$

$$f(0,8) = 0,8^3 - 10 \cdot 0,8^2 + 5 = -0,888.$$

Pasul 2. Se calculează punctul x_m și valoarea funcției în acest punct.

$$x_m = (a+b) / 2 = (0,6+0,8)/2 = 0,7;$$

$$f(0,7) = 0,7^3 - 10 \cdot 0,7^2 + 5 = 0,443.$$

Pasul 3. Se modifică $a = x_m$ sau $b = x_m$ astfel încât să fie îndeplinită condiția $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Se constată că pentru $a = x_m$ condiția este satisfăcută astfel încât, în continuare, se va considera intervalul $[x_m, b]$.

Pasul 4. Se verifică condiția de convergență $|x_m - b| < \varepsilon$.

$$|0,7 - 0,8| = 0,1 > 10^{-5}$$

Se repetă pașii 1 - 4 ai algoritmului cu o nouă iterație până este satisfăcută condiția de convergență.

În *iterația 14* se obțin următoarele rezultate:

$$x_m = 0,7346; f(x_m) = -4,4786 \cdot 10^{-5}; b = 0,7346; f(b) = -4,4786 \cdot 10^{-5};$$

Se constată că $|x_m - b| < \varepsilon$, astfel încât suntem în posesia rădăcinii căutate.

Rezultatele obținute în fiecare iterație sunt prezentate în Tabelul 4.1.

Tabelul 4.1. Rezultatele obținute în fiecare iterație cu metoda biseției

Iterația	x_m	$f(x_m)$	a	b
0	0	0	0,6000	0,8000
1	0,7000	0,4430	0,7000	0,8000
2	0,7500	-0,2031	0,7000	0,7500
3	0,7250	0,1248	0,7250	0,7500
4	0,7375	-0,0379	0,7250	0,7375
5	0,7312	0,0438	0,7312	0,7375
6	0,7344	0,0030	0,7344	0,7375
7	0,7359	-0,0175	0,7344	0,7359
8	0,7352	-0,0072	0,7344	0,7352
9	0,7348	-0,0021	0,7344	0,7348
10	0,7346	0,0004	0,7346	0,7348
11	0,7347	-0,0008	0,7346	0,7347
12	0,7346	-0,0002	0,7346	0,7346
13	0,7346	0,0001	0,7346	0,7346
14	0,7346	0	0,7346	0,7346

Exemplul 2

Folosind metoda aproximațiilor succesive să se afle rădăcina ecuației:

$$f(x) = x^2 - 2,$$

cu o eroare $\varepsilon = 10^{-5}$, știind că aceasta se găsește în intervalul $[1, 1,5]$. Se va considera o aproximație inițială $x_0 = 1,3$.

Rezolvare

Pasul 1. Se determină expresia funcției echivalente.

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{x} \rightarrow x + x = \frac{2}{x} + x \rightarrow x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = g(x)$$

Pasul 2. Se calculează valoarea funcției în punctul $x_0 = 1,3$.

$$g(1,3) = \frac{1}{2} \left(1,3 + \frac{2}{1,3} \right) = 1,4192$$

Pasul 3. Se verifică condiția de convergență $|x_1 - x_0| < \varepsilon$.

$$|1,4192 - 1,3| = 0,1192 > 10^{-5}$$

Se repetă pașii 1 - 3 ai algoritmului cu o nouă iterație până este satisfăcută condiția de convergență.

În *iterația 3* se obțin următoarele rezultate:

$$g = 1,4142; x_3 = 1,4142; \varepsilon = 8,8683 \cdot 10^{-6},$$

Rezultatele obținute în fiecare iterație sunt prezentate în Tabelul 4.2.

Tabelul 4.2. Rezultatele obținute în fiecare iterație cu metoda aproximațiilor succesive

Iterația	g	x	ε
1	1,4192	1,4192	0,1192
2	1,4142	1,4142	0,0050
3	1,4142	1,4142	$8,8683 \cdot 10^{-6}$

4.3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se studiază funcțiile *met_biseției* și *met_aprox_succ* dezvoltate în limbajul de programare Matlab și prezentate în Anexa 2.
3. Se testează funcțiile Matlab de la punctul 2, folosind exemplele numerice din paragraful 2.
4. Se consideră ecuațiile:

$$f(x) = 3x^4 - 4x - 1 = 0$$

$$f(x) = \sqrt{x^3} + 5x - 3 = 0$$

Folosind metoda biseției și aproximărilor succesive se cere să se găsească rădăcina care se află în intervalul $[1, 2]$, respectiv $[1, 4]$. Precizia de calcul are valoarea $eps=10^{-5}$. Rezolvarea se va face manual pentru cel puțin două iterații și cu fișierele Matlab *met_biseției* și *met_aprox_succ* pentru obținerea valorii rădăcinii.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele și condițiile în care au fost obținute (erorile admise, inițializarea soluției, numărul de iterații).