

LUCRAREA 5

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE

PARTEA II

5.1. Obiectivele lucrării

În cadrul lucrării se vor studia metodele Newton-Raphson și coardei utilizate în rezolvarea numerică a ecuațiilor algebrice și transcendente. Acestea reprezintă unele dintre cele mai cunoscute și utilizate metode de rezolvare a ecuațiilor neliniare din două motive: sunt simplu de utilizat și rapide. Ipoteza inițială care va fi considerată se referă la faptul că separarea rădăcinilor într-un interval $[a, b]$ a fost realizată în prealabil.

Cerințele lucrării se referă la rezolvarea ecuațiilor algebrice cu ajutorul acestor două metode. Rezolvarea se va efectua atât prin calcul manual, cât și cu ajutorul fișierelor funcție *met_Newton* și *met_coardei* dezvoltate în Matlab. După determinarea valorii soluțiilor, se va efectua o analiză a rezultatelor și se vor formula concluzii privind rezultatele obținute.

5.2. Aspecte teoretice

5.2.1. Metoda Newton-Raphson

Spre deosebire de alte metode, aceasta folosește atât derivatele de ordinul 1 cât și valorile funcției $f(x)$ care definește ecuația. Prin urmare, metoda se recomandă a fi utilizată numai în problemele în care derivatele de ordinul 1 pot fi calculate ușor.

Fie $f(x) = 0$ o ecuație algebrică sau transcendentă, care în intervalul $[a, b]$ are o rădăcină unică δ . Se presupune că derivatele de ordin 1 și 2, $f'(x)$ și $f''(x)$, sunt continue și păstrează semnul constant pentru orice $x \in [a, b]$, unde $a < b$.

În Fig. 5.1 este ilustrat algoritmul metodei din punct de vedere geometric. Pentru determinarea soluției care aproximează rădăcina δ se pornește de la o aproximație inițială x_0 . În continuare, în punctul de coordonate $(x_0, f(x_0))$ se duce tangenta la curbă, aceasta intersectând axa OX în punctul x_1 . Urmează apoi trasarea tangentei la curbă în punctul $(x_1, f(x_1))$. Algoritmul continuă până când este satisfăcută condiția de convergență:

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon \quad (5.1)$$

unde ε reprezintă precizia de aproximare.

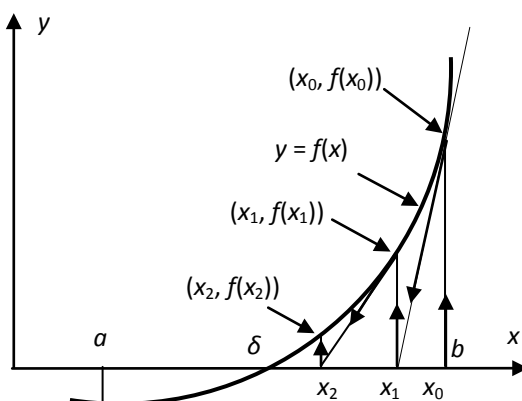


Fig. 5.1. Ilustrarea algoritmului metodei Newton-Raphson

Din punct de formal, metoda Newton-Raphson se dezvoltă pornind de la dezvoltarea în serii Taylor a funcției $f(x)$ în jurul aproximației curente, din care se pot reține doar primii doi termeni. Rezultatul acestei simplificări stă la baza determinării formulei Newton-Raphson de calcul a aproximării rădăcinei:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (5.2)$$

Un dezavantaj major al metodei Newton-Raphson îl constituie faptul că aceasta

poate converge numai în cazul în care aproximația inițială x_0 este suficient de aproape de soluția exactă δ . Convergența poate fi pusă în pericol dacă panta funcției $f(x)$ este prea netedă sau are variații prea bruște.

Alte dezavantaje ale metodei se referă la efortul și timpul de calcul al derivatelor de ordinul 1 în fiecare iterație, respectiv la posibilitatea ca, datorită unei forme aparte a curbei funcției $f(x)$, noile aproximații să se îndrepte rapid spre soluția exactă sau dimpotrivă să se învârtă în jurul soluției.

5.2.2. Metoda coardei

Metoda coardei determină șirul aproximațiilor succesive folosind, pe intervale succesive, aproximarea curbei funcției $f(x)$ prin coarda care unește punctele de pe graficul funcției situate la extremitatea intervalelor respective. În Fig. 5.2 este ilustrat algoritmul metodei din punct de vedere geometric. Se poate observa faptul că șirul aproximațiilor succesive converge către soluția exactă δ .

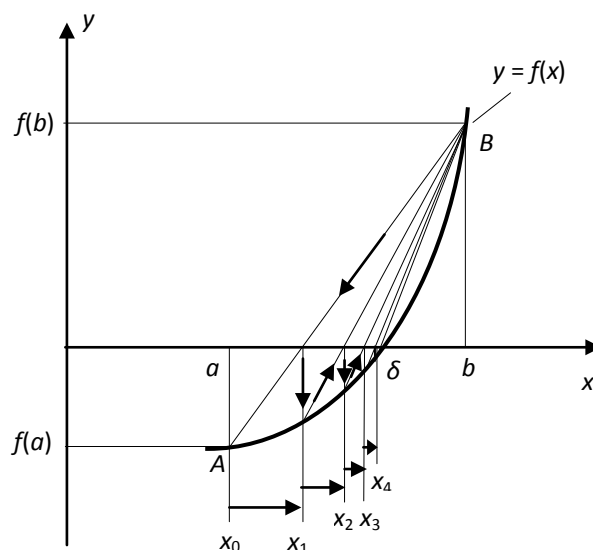


Fig. 5.2. Algoritmul de obținere a soluției prin metoda coardei

Din punct de vedere matematic, aproximarea funcției prin coarda AB conduce la ecuația unei drepte:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (5.3)$$

În continuare, prima aproximație, x_1 , se determină dacă se înlocuiește în relația (5.3) pe x cu x_1 . Dacă condiția $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ nu este îndeplinită, atunci noul subinterval $[x_1, b]$ va cuprinde soluția ecuației. Procedul de aproximare se repetă în același mod pentru noul subinterval. Dacă se presupune că pentru subintervalul $[x_{n-1}, x_n]$ este îndeplinită condiția $f(x_{n-1}) \cdot f(x_n) < 0$, atunci pentru determinarea soluției aproximative x_{n+1} este valabilă relația de recurență:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (5.4)$$

Utilizarea metodei coardei se face folosind în fiecare iterație o relație de forma (5.4) pentru care extremitatea intervalului $[a, b]$ se modifică permanent, după modelul prezentat la metoda înjumătățirii intervalului. O comparație între metoda înjumătățirii intervalului și metoda coardei arată că pentru aceeași lungime a unui interval $[a, b]$, metoda coardei asigură apropierea de soluția exactă δ într-un număr mai mic de pași.

Exemple numerice

Exemplul 1

Folosind metoda Newton să se afle rădăcina ecuației:

$$f(x) = x^3 - x - 3,$$

cu o eroare $\varepsilon = 10^{-3}$, știind că aceasta se găsește în intervalul $[1, 2]$. Numărul maxim de iterații este $N_{max} = 10$, iar aproximația inițială este $x_0 = 1$.

Rezolvare

Pasul 1. Se calculează derivata funcției.

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

Pasul 2. Se folosește relația (5.2).

$$x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - x - 3}{3x^2 - 1} = \frac{2x^3 - 3}{3x^2 - 1}$$

Pasul 3. Se determină soluția aproximativă.

Iterația 1: $x_1 = \frac{2 \cdot (1)^3 + 3}{3 \cdot (1)^2 - 1} = 2,5$

$$|x_1 - x_0| = |2,5 - 1| = 1,5 > 0,001$$

Iterația 2: $x_2 = \frac{2 \cdot (1,5)^3 + 3}{3 \cdot (1,5)^2 - 1} = 1,9296$

$$|x_2 - x_1| = |1,9296 - 2,5| = 0,5704 > 0,001$$

Iterația 3: $x_3 = \frac{2 \cdot (1,9296)^3 + 3}{3 \cdot (1,9296)^2 - 1} = 1,7079$

$$|x_3 - x_2| = |1,7079 - 1,9296| = 0,2217 > 0,001$$

Iterația 4: $x_4 = \frac{2 \cdot (1,7079)^3 + 3}{3 \cdot (1,7079)^2 - 1} = 1,6726$

$$|x_5 - x_4| = |1,6726 - 1,7079| = 0,0353 > 0,001$$

Iterația 5: $x_5 = \frac{2 \cdot (1,6726)^3 + 3}{3 \cdot (1,6726)^2 - 1} = 1,6717$

$$|x_5 - x_4| = |1,6717 - 1,6726| = 0,0009 < 0,001$$

Rădăcina ecuației este 1,6717.

Exemplul 2

Folosind metoda coardei să se afle rădăcina ecuației:

$$f(x) = x^2 - 2,$$

cu o eroare $\varepsilon = 10^{-3}$, știind că aceasta se găsește în intervalul $[1, 2]$. Numărul maxim de iterații este $N_{max} = 10$.

Rezolvare

Se determină soluția aproximativă folosind relația (5.4).

Iterația 1: $x_1 = (2^2 - 2) - (2^2 - 2) \cdot \frac{2-1}{(2^2-2)-(1^2-2)} = 2 - \frac{2}{3} = 1,3333$

$$|x_1 - x_0| = |1,3333 - 1| = 0,3333 > 0,001$$

Iterația 2: $x_2 = (2^2 - 2) - (2^2 - 2) \cdot \frac{2-1,3333}{(2^2-2)-(1,3333^2-2)} = 2 - \frac{1,3333}{2,2222} = 1,4000$

$$|x_2 - x_1| = |1,4000 - 1,3333| = 0,0667 > 0,001$$

Iterația 3: $x_3 = (2^2 - 2) - (2^2 - 2) \cdot \frac{2-1,4000}{(2^2-2)-(1,4000^2-2)} = 2 - \frac{1,2000}{2,040} = 1,4117$

$$|x_3 - x_2| = |1,4117 - 1,4000| = 0,0117 > 0,001$$

Iterația 4: $x_4 = (2^2 - 2) - (2^2 - 2) \cdot \frac{2-1,4117}{(2^2-2)-(1,4117^2-2)} = 2 - \frac{1,1766}{2,0071} = 1,4137$

$$|x_4 - x_3| = |1,4137 - 1,4117| = 0,002 > 0,001$$

Iterația 5: $x_5 = (2^2 - 2) - (2^2 - 2) \cdot \frac{2-1,4137}{(2^2-2)-(1,4137^2-2)} = 2 - \frac{1,1726}{2,0014} = 1,4141$

$$|x_5 - x_4| = |1,4141 - 1,4137| = 0,0004 < 0,001$$

Rădăcina ecuației este 1,4141, ceea ce era evident.

5.3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se studiază funcțiile *met_Newton* și *met_coardei* dezvoltate în limbajul Matlab, prezentate în Anexa 2.
3. Se testează funcțiile Matlab precizate la punctul 2 folosind exemplele numerice din paragraful 2.
4. Se consideră ecuațiile:

$$f(x) = \ln x + 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$f(x) = x^4 - x - 1$$

Folosind metodele Newton-Raphson și coardei se cere să se găsească rădăcina care se află în intervalul $[1, 2]$. Precizia de calcul are valoarea $eps = 10^{-3}$. Rezolvarea se va face manual pentru cel puțin două iterații și cu funcțiile Matlab *met_newton* și *met_coardei* pentru obținerea valorii rădăcinii.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele obținute și condițiile în care au rezultat (erorile admise, inițializarea soluției, numărul de iterații).

