

LUCRAREA 6

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE FOLOSIND METODE DIRECTE. PARTEA I

6.1. Obiectivele lucrării

În cadrul lucrării sunt prezentate două dintre cele mai utilizate metode directe de rezolvare numerică a sistemelor de ecuații liniare: metoda eliminărilor Gauss și metoda eliminării Gauss – Jordan.

Caracteristica comună a metodelor prezentate este reprezentată de faptul că acestea transformă sistemul inițial de ecuații liniare într-un sistem echivalent, cu o formă superior sau inferior triunghiulară, care poate fi rezolvat mult mai ușor.

Cerințele lucrării se referă la soluționarea numerică a sistemelor de ecuații liniare utilizând metoda eliminărilor Gauss și eliminării Gauss-Jordan. Rezolvarea se va efectua prin calcul manual și cu funcțiile Matlab *met_elimgauss* și *met_gaussjordan*. Se va efectua o analiză comparativă a celor două metode prin intermediul rezultatelor obținute.

6.2. Aspecte teoretice

6.2.1. Modelul matematic

În general, un sistem de n ecuații liniare având coeficienții $a_{ij} \in R$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) și termenii liberi $b_i \in R$, ($i = 1, \dots, m$), cu n necunoscute, $x_j \in R$ ($j = 1, \dots, n$), are următoarea formă:

[illegible]

- schimbarea a două ecuații între ele (modifică semnul determinatului matricei A);
- înmulțirea unei ecuații cu un scalar diferit de zero (înmulțește determinantul matricei A cu același scalar);
- adunarea unei ecuații înmulțită cu un scalar diferit de zero la o altă ecuație (nu modifică valoarea determinantului matricei A).

Aceste metode permit determinarea soluției exacte într-un număr finit de pași.

Metodele eliminării Gauss și eliminării Gauss-Jordan urmăresc aducerea sistemului inițial de ecuații liniare la una din formele superior sau inferior triunghiulară (6.7) care poate fi rezolvată pe căi elementare.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

6.2.2.1. Metoda eliminării Gauss

Metoda conține două etape principale: de eliminare și de determinare a soluțiilor. În continuare va fi prezentat numai cazul în care matricea A este adusă la o formă superior triunghiulară, deoarece cazul aducerii matricei A la forma inferior triunghiulară este similar.

Aducerea matricei A la o formă superior triunghiulară presupune anularea tuturor termenilor situați sub diagonala principală, după care se determină soluția sistemului începând cu x_n și terminând cu x_1 .

În cadrul *etapei de eliminare* nu este necesar să transcriem și necunoscutele x ; este suficient să operăm doar cu coeficienții matricei A și cu termenii liberi b .

Inițial, se vor obține zerouri succesiv, mai întâi pe prima coloană (sub coeficientul a_{11}), apoi pe a doua coloană (sub coeficientul a_{22}), și așa mai departe, pe ultima linie a matricei A rămânând doar coeficientul a_{nn} (evident modificat de operațiile de eliminare efectuate anterior). Pentru a obține zerourile de sub diagonala principală, se folosesc operații simple de înmulțire a unei linii cu un multiplicator și de scădere din altă linie.

Pentru a obține zerouri pe prima coloana, din liniile 2 până la n se scade prima linie, înmulțită cu multiplicatorul a_{i1}/a_{11} , $i = 1, \dots, n$. În continuare, pentru a obține zerouri pe coloana a doua, din linia a treia se scade linia a doua, înmulțită cu multiplicatorul a_{i2}/a_{22} ($i = 3, \dots, n$). Algoritmul continuă în mod identic până se obțin zerouri pe toate coloanele.

Algoritmul poartă denumirea de eliminarea Gauss înainte și poate fi generalizat prin intermediul următoarelor relații:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right) a_{kj}^{(k-1)}, \quad i, j = k+1, \dots, n \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - \left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right) b_k^{(k-1)}, \quad i = k+1, \dots, n \end{aligned} \quad (6.8)$$

În cadrul *etapei de determinare a necunoscutelor*, acestea se obțin prin retrosubstituție. Astfel, se determină inițial ultima necunoscută x_n și se ajunge în final la determinarea necunoscute x_1 .

Procedura pentru determinarea soluțiilor poartă denumirea de *substituție înapoi* și poate fi generalizată astfel:

$$x_i = \frac{\left(b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j \right)}{a_{ii}^{(i-1)}}, \quad i = n, \dots, 1 \quad (6.9)$$

Din expresiile de calcul (6.8) se constată faptul că procesul de triunghiularizare poate eșua în momentul în care un element diagonal a_{kk} ar deveni sau ar fi egal cu zero. Acest element diagonal, care intervine în toate relațiile de calcul, poartă denumirea de *pivot*. În cazul în care, la un moment dat, pivotul are valoarea zero continuitatea algoritmului este posibilă numai dacă prin schimbarea ordinii a două ecuații, pe diagonală se aduce un pivot nenul. Din considerente de calcul numeric, alegerea noului pivot se face astfel încât acesta să reprezinte elementul subdiagonal maxim în valoare absolută. În acest fel se asigură reducerea erorilor determinate de împărțirea la numere foarte mici. Acest procedeu de alegere a pivotului se numește *pivotare parțială*, dar

îmbunătățirea preciziei prin aplicarea acestui procedeu de pivotare este nesemnificativă și consumă mai mult timp de calcul.

6.2.2.2. Metoda eliminării Gauss-Jordan

Metoda este similară cu metoda eliminărilor Gauss, cu deosebirea că produce zerouri atât sub cât și deasupra diagonalei principale, reducând astfel matricea inițială la o matrice diagonală. Ca urmare a numărului sporit de operații, utilizarea metodei Gauss-Jordan la rezolvarea sistemelor de ecuații nu este justificată. Această metodă este însă utilizată la calculul numeric al matricei inverse, notată cu A^{-1} .

Astfel, metoda presupune transformarea sistemului:

$$[A] \cdot [X] = [b] \quad (6.10)$$

într-un sistem echivalent (care are soluție similară cu cea a sistemului original) de forma:

$$[A^*] \cdot [X] = [b^*] \quad (6.11)$$

pentru care rezolvarea este foarte simplă.

Metoda se caracterizează prin faptul că matricea A^* se identifică cu matricea unitate I , ceea ce permite determinarea rapidă a soluției:

$$[X] = [b^*] \quad (6.12)$$

Cu alte cuvinte, matricea coeficienților A trebuie redusă la matricea unitate I efectuând operațiile corespunzătoare asupra vectorului b .

În timp ce metoda eliminării Gauss conține eliminarea înainte sau înapoi, pentru a transforma matricea inițială a coeficienților într-o matrice superior sau inferior triunghiulară, respectiv, substituția înainte sau înapoi, în vederea determinării soluției, metoda Gauss-Jordan conține atât eliminarea înainte cât și eliminarea înapoi, în scopul transformării matricei inițiale în matrice unitate, astfel încât vectorul termenilor liberi rezultat va coincide cu soluția sistemului inițial.

Procedura are aceleași formule generale ca în cazul eliminării Gauss (relațiile 6.8), cu excepția faptului că indicele $i \neq k$.

Exemple numerice

Exemplul 1

Se consideră următorul sistem de 3 ecuații liniare:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 & : l_1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -16 & : l_2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 17 & : l_3 \end{cases}$$

Se cere rezolvarea sistemului folosind metoda eliminării Gauss cu încorporarea procedurii de substituție înapoi.

Rezolvare

a. Etapa de eliminare

Pentru a obține zerouri pe prima coloană, din liniile a doua și a treia se scade prima linie, înmulțită cu multiplicatorul a_{i1}/a_{11} , adică:

$$\text{Ecuația } (l_2) \leftarrow \text{Ecuația } (l_2) - (-0,5) \cdot \text{Ecuația } (l_1)$$

$$\text{Ecuația } (l_3) \leftarrow \text{Ecuația } (l_3) - (0,25) \cdot \text{Ecuația } (l_1)$$

În urma acestor operații elementare sistemul inițial se transformă, forma acestuia fiind:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_2 - 1,5x_3 = -10,5 \\ -1,5x_2 + 3,75x_3 = 14,25 \end{cases}$$

Pentru a obține zerouri pe coloana a doua, din linia a treia se scade linia a doua înmulțită cu multiplicatorul a_{i2}/a_{22} ($i = 3$):

$$\text{Ecuația } (l_3) \leftarrow \text{Ecuația } (l_3) - (-0,5) \cdot \text{Ecuația } (l_2)$$

În final, se obține:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_2 - 1,5x_3 = -10,5 \\ 3x_3 = 9 \end{cases}$$

b. Etapa de determinare a necunoscutelor

$$x_3 = 9/3 = 3;$$

$$x_2 = (-10,5 + 1,5 \cdot x_3) / 3 = (-10,5 + 1,5 \cdot 3) / 3 = -2;$$

$$x_1 = (11 + 2 \cdot x_2 - x_3) / 4 = (11 + 2 \cdot (-2) - 3) / 4 = 1.$$

Exemplul 2

Se consideră sistemul format din 3 ecuații liniare definit în cadrul exemplului 1. Se cere determinarea soluției acestui sistem folosind metoda eliminării Gauss-Jordan.

Rezolvare

Se construiește matricea extinsă prin asocierea la dreapta matricei A a vectorului termenilor liberi, b :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 11 \\ -2 & 4 & -2 & -16 \\ 1 & -2 & 4 & 17 \end{bmatrix} : l_1$$

Se împarte prima linie la termenul $a_{11} = 4$, obținându-se o nouă ecuație $l_1^{(1)}$. Pentru a obține zerouri pe prima coloană, din liniile a doua și a treia se scade prima linie nou obținută, înmulțită cu multiplicatorul a_{i1} , $i = 2, 3$, adică:

$$\text{Ecuația } (l_2^{(1)}) \leftarrow \text{Ecuația } (l_2) - (-2) \cdot \text{Ecuația } (l_1^{(1)})$$

$$\text{Ecuația } (l_3^{(1)}) \leftarrow \text{Ecuația } (l_3) - (1) \cdot \text{Ecuația } (l_1^{(1)})$$

După efectuarea acestor operații elementare sistemul inițial devine:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0,25 & 2,75 \\ 0 & 3 & -1,5 & -10,5 \\ 0 & -1,5 & 3,75 & 14,25 \end{bmatrix} : l_1^{(1)}$$

Se împarte linia a doua $l_2^{(I)}$ la $a_{22}^{(I)} = 3$, obținându-se o nouă ecuație $l_2^{(II)}$. Pentru a obține zerouri pe a doua coloană, din prima și a treia linie se scade a doua linie nou obținută, înmulțită cu multiplicatorul $a_{i2}^{(I)}$, $i = 1, 3$, adică:

$$\text{Ecuația } (l_1^{(III)}) \leftarrow \text{Ecuația } (l_1^{(II)}) - (-0,5) \cdot \text{Ecuația } (l_2^{(II)})$$

$$\text{Ecuația } (l_3^{(III)}) \leftarrow \text{Ecuația } (l_3^{(II)}) - (-1,5) \cdot \text{Ecuația } (l_2^{(II)})$$

După efectuarea acestor operații elementare sistemul are următoarea formă:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(II)} & a_{12}^{(II)} & a_{13}^{(II)} & b_1^{(II)} \\ a_{21}^{(II)} & a_{22}^{(II)} & a_{23}^{(II)} & b_2^{(II)} \\ a_{31}^{(II)} & a_{32}^{(II)} & a_{33}^{(II)} & b_3^{(II)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0,5 & -3,5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} : \begin{matrix} l_1^{(II)} \\ l_2^{(II)} \\ l_3^{(II)} \end{matrix}$$

În ultimul pas al algoritmului se împarte a treia linie $l_3^{(III)}$ la $a_{33}^{(II)} = 3$, obținându-se o nouă ecuație $l_3^{(III)}$. Pentru a obține zerouri și pe a treia coloană, din prima și a doua linie se scade a treia linie nou obținută, înmulțită cu multiplicatorul $a_{i3}^{(II)}$, $i = 1, 2$, adică:

$$\text{Ecuația } (l_1^{(III)}) \leftarrow \text{Ecuația } (l_1^{(II)}) - (0) \cdot \text{Ecuația } (l_3^{(III)})$$

$$\text{Ecuația } (l_2^{(III)}) \leftarrow \text{Ecuația } (l_2^{(II)}) - (-0,5) \cdot \text{Ecuația } (l_3^{(III)})$$

În final, sistemul devine:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(III)} & a_{12}^{(III)} & a_{13}^{(III)} & b_1^{(III)} \\ a_{21}^{(III)} & a_{22}^{(III)} & a_{23}^{(III)} & b_2^{(III)} \\ a_{31}^{(III)} & a_{32}^{(III)} & a_{33}^{(III)} & b_3^{(III)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} : \begin{matrix} l_1^{(III)} \\ l_2^{(III)} \\ l_3^{(III)} \end{matrix}$$

Această formă finală a sistemului ne indică și soluția: $X = [1 \ -2 \ 3]$.

6.3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării și metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare.
2. Se vor studia funcțiile *met_elimgauss* și *met_gaussjordan* dezvoltate în limbajul Matlab prezentate în Anexa 2.

3. Se testează funcțiile Matlab precizate la punctul 2 folosind exemplele numerice din paragraful 2.
4. Se soluționează următoarele aplicații cu ajutorul metodelor eliminării Gauss și eliminării Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 1x_2 + 4.3x_3 + 2x_4 = -4.6 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 10x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 = -8 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 10x_3 = 9 \end{cases}$$

Rezolvarea se va face manual, iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcțiilor Matlab *met_elimgauss* și *met_gaussjordan*.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele obținute și condițiile în care au rezultat.

