

LUCRAREA 7

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE FOLOSIND METODE DIRECTE. PARTEA II

7.1. Obiectivele lucrării

În cadrul lucrării sunt prezentate metodele directe de rezolvare numerică a sistemelor de ecuații liniare bazate pe factorizarea matricei coeficienților: factorizările Doolittle, Crout și Choleski. Caracteristica comună a metodelor de factorizare este reprezentată de faptul că matricea coeficienților A se exprimă sub forma unui produs de două matrice de același ordin (o matrice inferior triunghiulară, L , și una superior triunghiulară, U).

Cerințele lucrării se referă la soluționarea numerică a unui sistem de ecuații liniare utilizând metodele de factorizare Doolittle, Crout și Choleski. Rezolvarea se va efectua prin calcul manual și cu funcțiile dezvoltate în Matlab: *factorizarea_doolittle*, *factorizarea_crout* și *factorizarea_cholesky*. Se va efectua o analiză comparativă a metodelor folosite prin intermediul rezultatelor obținute.

7.2. Aspecte teoretice

7.2.1. Generalități

Dacă se consideră matricea coeficienților A pătratică, de rang n , aceasta poate fi descompusă într-un produs dintr-o matrice inferior triunghiulară L și una superior triunghiulară U :

$$[A] = [L] \cdot [U] \quad (7.1)$$

adică:

$$[A] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Pentru a rezolva sistemul

$$[A] \cdot [X] = [b] \quad (7.3)$$

se poate folosi descompunerea (7.1) și ținând cont de asociativitatea produsului de matrice, rezultă:

$$[A] = ([L] \cdot [U]) \cdot [X] = [L] \cdot ([U] \cdot [X]) = [b] \quad (7.4)$$

Din expresia obținută se poate observa faptul că, pentru obținerea soluției sistemului inițial se rezolvă succesiv două sisteme:

$$\begin{cases} [L] \cdot [Y] = [b] \\ [U] \cdot [X] = [Y] \end{cases} \quad (7.5)$$

Din punct de vedere al calculului propriu-zis, determinarea celor două matrice de factorizare presupune calculul a $(n^2 + n)$ necunoscute utilizând (n^2) ecuații. În această situație, sistemul care se obține este un sistem nedeterminat. Pentru ca acest sistem să poată avea o soluție unică este necesar să se precizeze a priori n necunoscute, care se numesc necunoscute dependente. Cele mai utilizate alegeri se referă la elementele diagonale ale uneia dintre cele două matrice, L sau U . Modul de alegere a necunoscutelor dependente generează două tipuri de factorizări:

- *factorizarea Doolittle*, care impune matricei L să aibă valoarea elementelor diagonale egală cu unitatea, $l_{ii} = 1$, unde $i = 1, \dots, n$.
- *factorizarea Crout*, care impune matricei U să aibă valoarea elementelor diagonale

egală cu unitatea, $u_{ii} = 1$, unde $i = 1, \dots, n$;

Mai există un al treilea tip de factorizare, numită *factorizarea Cholesky*, care se poate aplica matricelor simetrice și pozitiv definite. În acest caz cele două matrice de factorizare satisfac relația $L = U^t$, astfel încât relația (7.1) devine:

$$[A] = [L] \cdot [L]^t \quad (7.6)$$

7.2.2. Metode de factorizare

7.2.2.1. Factorizarea Doolittle

Factorizarea Doolittle se caracterizează prin faptul că elementele diagonale ale matricei L au valorile $l_{ii} = 1$, unde $i = 1, \dots, n$.

Pentru a obține formele superior triunghiulară pentru matricea U și inferior triunghiulară pentru matricea L se vor utiliza următoarele relații:

- pentru elementele de pe prima linie din matricea de factorizare U :

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (7.7)$$

- pentru elementele de pe liniile $i, i = 2, \dots, n$, ale matricei L :

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}}{u_{jj}}, \quad j = 1 \quad (7.8)$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right) \cdot \frac{1}{u_{jj}}, \quad j = 2, \dots, i-1 \quad (7.9)$$

- pentru elementele liniei i a matricei U :

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, \quad j = i, \dots, n \quad (7.10)$$

Relațiile (7.7) – (7.10) stau la baza algoritmului factorizării Doolittle.

7.2.2.2. Factorizarea Crout

Factorizarea Crout se caracterizează prin faptul că elementele diagonale ale matricei U au valorile $u_{ii} = 1$, unde $i = 1, \dots, n$.

Expresiile elementelor nenule din matricele L și U specifice factorizării Crout sunt următoarele:

- pentru elementele de pe prima coloană din matricea de factorizare L :

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (7.11)$$

- pentru elementele de pe coloanele j , $j = 2, \dots, n$, ale matricei U :

$$u_{ij} = \frac{a_{ij}}{l_{jj}}, \quad i = 1 \quad (7.12)$$

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right) \cdot \frac{1}{l_{ii}}, \quad i = 1, \dots, j-1 \quad (7.13)$$

- pentru elementele coloanei j a matricei L :

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right), \quad i = j, \dots, n \quad (7.14)$$

Relațiile (7.11) – (7.14) stau la baza algoritmului factorizării Crout.

7.2.2.3. Factorizarea Cholesky

Factorizarea Cholesky se poate aplica în situația în care matricea A este simetrică și pozitiv definită, fiind mai eficientă din punct de vedere numeric. O matrice A este simetrică dacă satisface egalitatea $A = A^t$ (matricea transpusă) și pozitiv definită dacă satisface condiția

$$[X]^t \cdot [A] \cdot [X] > 0 \quad (7.15)$$

pentru orice vector X , iar anularea produsului (7.15) are loc numai dacă X este identic cu

vectorul nul.

Dacă cele două proprietăți sunt satisfăcute, factorizarea Cholesky descompune matricea A într-un produs de două matrice triunghiulare de tipul $L \cdot U$, cu proprietatea că matricea U este egală cu transpusa matricei L :

$$[A] = [L] \cdot [L]^t \quad (7.16)$$

Pentru acest tip de factorizare, cu ajutorul relației (7.16) se pot scrie $(n^2+n)/2$ ecuații independente care conțin tot atâtea necunoscute (elementele nenule din matricea L). În consecință, factorizarea Cholesky a unei matrice este unică, nefiind necesară precizarea a priori a valorilor necunoscute.

Expresiile elementelor nenule din matricea L specifice factorizării Cholesky sunt următoarele:

- pentru $j = 1$:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{i1} = a_{i1}/l_{11}, \quad i = 2, \dots, n \quad (7.17)$$

- pentru $i = j$:

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \quad j = 2, \dots, n \quad (7.18)$$

- pentru $i \neq j$:

$$l_{ij} = \frac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right)}{l_{jj}}, \quad j = 2, \dots, n-1, \quad i = j+1, \dots, n \quad (7.19)$$

Implementarea factorizării Cholesky trebuie să prevadă un test privind semnul expresiei de sub radical, relația (7.18), care să permită oprirea procesului de calcul în situația în care acesta este negativ. Asemenea situație se poate întâlni atunci când matricea A nu este sau este foarte aproape de a nu fi pozitiv definită.

Exemple numerice

Exemplul 1

Se consideră sistemul de ecuații liniar:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Se cere rezolvarea sistemului folosind metoda factorizării Doolittle.

Rezolvare

a. Etapa de triunghiularizare

- inițializarea matricei L cu matricea unitate și a matricei U cu zero.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- se folosește relația (7.7) pentru a determina elementele de pe prima linie din matricea superior triunghiulară U .

$$U = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 3 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- se folosesc relațiile (7.8) – (7.9) pentru determinarea elementelor din matricea inferior triunghiulară L și a celorlalte elemente din matricea superior triunghiulară U .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0,6667} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-7,3333} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7,3333 & 1,6667 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7,3333 & 1,6667 \\ 0 & 0 & 2,8636 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,6667 & 1 & 0 \\ 1,3333 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,6667 & 1 & 0 \\ 1,3333 & -0,3182 & 1 \end{bmatrix};$$

b. Etapa de determinare a necunoscutelor

- se determină soluția sistemului $[L] \cdot [Y] = [b]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,6667 & 1 & 0 \\ 1,3333 & -0,3182 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,6667 & 1 & 0 \\ 1,3333 & -0,3182 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,6667 & 1 & 0 \\ -5,5454 & 0,3182 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5,6667 \\ -2,863 \end{bmatrix}$$

- se determină soluția X a sistemului $[U] \cdot [X] = [Y]$, ce reprezintă și soluția problemei.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7,3333 & 1,6667 \\ 0 & 0 & 2,8636 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5,6667 \\ -2,863 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7,3333 & 1,6667 \\ 0 & 0 & 2,8636 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5,6667 \\ -2,863 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,3333 & 0,0909 & 0,0635 \\ 0 & -0,1364 & 0,0794 \\ 0 & 0 & 0,3493 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5,6667 \\ -2,863 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exemplul 2

Se consideră sistemul format din 3 ecuații liniare definit în cadrul Exemplului 1. Se cere determinarea soluției acestui sistem folosind metoda factorizării Crout.

Rezolvare

a. Etapa de triunghiularizare

- inițializarea matricei U cu matricea unitate și a matricei L cu zero.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- se folosește relația (7.11) pentru a determina elementele de pe prima coloană din matricea inferior triunghiulară L .

$$L = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \boxed{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- se folosesc relațiile (7.12) – (7.14) pentru determinarea elementele din matricea superior triunghiulară U și a celorlalte elementelor din matricea inferior triunghiulară L .

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{0,6667} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-7,3333} & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -7,3333 & 0 \\ 4 & \boxed{2,3333} & 0 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -7,3333 & 0 \\ 4 & 2,3333 & \boxed{2,8636} \end{bmatrix};$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0,6667 & -0,3333 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 1 & 0,6667 & -0,3333 \\ 0 & 1 & -0,2273 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Etapa de determinare a necunoscutelor

- se determină soluția sistemului $[L] \cdot [Y] = [b]$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -7,3333 & 0 \\ 4 & 2,3333 & 2,8636 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -7,3333 & 0 \\ 4 & 2,3333 & 2,8636 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,3333 & 0 & 0 \\ 0,0909 & -0,1364 & 0 \\ -0,5397 & 0,1111 & 0,3492 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6667 \\ -0,7728 \\ -1,0000 \end{bmatrix}$$

- se determină soluția X a sistemului $[U] \cdot [X] = [Y]$, ce reprezintă și soluția problemei.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,6667 & -0,3333 \\ 0 & 1 & -0,2273 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6667 \\ -0,7728 \\ -1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,6667 & -0,3333 \\ 0 & 1 & -0,2273 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1,6667 \\ -0,7728 \\ -1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,6667 & 0,1818 \\ 0 & 1 & 0,2273 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,6667 \\ -0,7728 \\ -1,0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exemplul 3

Se consideră sistemul de ecuații liniar:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 10 \end{cases}$$

Se cere rezolvarea sistemului folosind metoda factorizării Cholesky.

Rezolvare

a. Etapa de triunghiularizare

- se verifică dacă matricea coeficienților A este simetrică și pozitiv definită

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}; \quad A^t = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{matricea } A \text{ este simetrică.}$$

Pentru orice vector X (diferit de vectorul nul), relația $[X]^t \cdot [A] \cdot [X] > 0$ este satisfăcută.

- se folosesc relațiile (7.17) – (7.19) pentru a determina elementele subdiagonale din matricea A .

$$A = \begin{bmatrix} 2,4495 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 2,4495 & -3 & 1 \\ -1,2247 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 2,4495 & -3 & 1 \\ -1,2247 & 6 & -3 \\ 0,4082 & -3 & 6 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 2,4495 & -3 & 1 \\ -1,2247 & 2,1213 & -3 \\ 0,4082 & -1,1785 & 6 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 2,4495 & -3 & 1 \\ -1,2247 & 2,1213 & -3 \\ 0,4082 & -1,1785 & 6 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 2,4495 & -3 & 1 \\ -1,2247 & 2,1213 & -3 \\ 0,4082 & -1,1785 & 2,1082 \end{bmatrix}.$$

- din matricea A se extrag elementele diagonale și subdiagonale care vor forma matricea L .

$$L = \begin{bmatrix} 2,4495 & 0 & 0 \\ -1,2247 & 2,1213 & 0 \\ 0,4082 & -1,1785 & 2,1082 \end{bmatrix}$$

b. Etapa de determinare a necunoscutelor

- se determină soluția sistemului $[L] \cdot [Y] = [b]$.

$$\begin{bmatrix} 2,4495 & 0 & 0 \\ -1,2247 & 2,1213 & 0 \\ 0,4082 & -1,1785 & 2,1082 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,4495 & 0 & 0 \\ -1,2247 & 2,1213 & 0 \\ 0,4082 & -1,1785 & 2,1082 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,4082 & 0 & 0 \\ 0,2357 & 0,4714 & 0 \\ 0,0527 & 0,2635 & 0,4743 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8577 \\ 5,8925 \\ 7,4841 \end{bmatrix}$$

- se determină soluția X a sistemului $[L]^t \cdot [X] = [Y]$, ce reprezintă și soluția problemei.

$$\begin{bmatrix} 2,4495 & -1,2247 & 0,4082 \\ 0 & 2,1213 & -1,1785 \\ 0 & 0 & 2,1082 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8577 \\ 5,8925 \\ 7,4841 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,4495 & -1,2247 & 0,4082 \\ 0 & 2,1213 & -1,1785 \\ 0 & 0 & 2,1082 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2,8577 \\ 5,8925 \\ 7,4841 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,4082 & 0,2357 & 0,0527 \\ 0 & 0,4714 & 0,2635 \\ 0 & 0 & 0,4743 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2,8577 \\ 5,8925 \\ 7,4841 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,9500 \\ 4,7500 \\ 3,5500 \end{bmatrix}$$

7. 3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se vor studia funcțiile pentru soluționarea numerică a sistemelor de ecuații liniare cuprinse în Matlab prezentate în Anexa 1.
3. Se testează funcțiile dezvoltate în Matlab: *factorizarea_doolittle*, *factorizarea_crout* și *factorizarea_cholesky* prezentate în Anexa 2, folosind exemplele numerice prezentate în paragraful 2.
4. Se soluționează următoarele aplicații cu ajutorul metodelor de factorizare:

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_3 + 2x_3 = 6 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

Rezolvarea se va face manual, iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcțiilor Matlab *factorizarea_doolittle*, *factorizarea_crout* și *factorizarea_cholesky*.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele obținute și condițiile în care au rezultat.