

LUCRAREA 8

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE FOLOSIND METODE ITERATIVE

8.1. Obiectivele lucrării

În cadrul lucrării sunt prezentate cele mai utilizate metode iterative de rezolvare numerică a sistemelor de ecuații liniare: Jacobi, Seidel-Gauss și Seidel-Gauss modificată. Metodele iterative permit determinarea soluției exacte a unui sistem de ecuații liniare numai atunci când s-ar parcurge un număr nelimitat (teoretic infinit) de iterații. În practică acest lucru nu este posibil, astfel încât această categorie de metode determină doar o soluție aproximativă a cărei precizie depinde de o mărime indicată inițial, înainte de începerea procesului iterativ.

Cerințele lucrării se referă la soluționarea numerică a unui sistem de ecuații liniare utilizând metodele Jacobi, Seidel-Gauss și Seidel-Gauss modificată. Rezolvarea se va efectua prin calcul manual și cu funcțiile Matlab *met_jacobi*, *met_seidelgaus* și *met_seidelgauss_modif*. Se va efectua o analiză comparativă a metodelor folosite prin intermediul rezultatelor obținute.

8.2. Aspecte teoretice

8.2.1. Generalități

În rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare folosind metode iterative se pornește de la o aproximație inițială, notată X^0 , și se construiește un șir de aproximații succesive $X^0, X^1, \dots, X^k, \dots$ care în anumite condiții converge către soluția exactă, notată

ordinei unor ecuații astfel încât să se asigure valori nenule pentru toate elementele diagonale. Această operație se poate realiza folosind pivotarea parțială care se execută o singură dată, înaintea intrării în bucla iterativă.

Aplicarea cu succes a metodei Jacobi necesită și o altă condiție legată de matricea A care trebuie să fie dominant diagonală, adică elementele diagonale ale acesteia să domine în valoare absolută elementele din afara diagonalei principale:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (8.4)$$

Dacă matricea A este dominant diagonală, aproximația inițială poate fi aleasă oricum, iar metoda va converge. Însă, atunci când nu se cunosc informații privind localizarea soluției se poate considera aproximația inițială identică cu termenii liberi.

Condiția de convergență impusă procesului iterativ se referă la abaterea maximă între două iterații succesive care trebuie să fie sub o valoare prag $E_{\max}$, impusă de utilizator. Abaterea maximă se definește ca cea mai mare abatere, în valoare absolută, între necunoscute în două iterații succesive:

$$\max_i (|x_i^{k+1} - x_i^k|) \leq E_{\max} \quad (8.5)$$

8.2.2.2. Metoda Seidel-Gauss

Metoda Seidel-Gauss este foarte asemănătoare cu metoda Jacobi, singura deosebire dintre ele fiind următoarea: la metoda Jacobi în partea dreaptă a relației (8.3) apar numai valorile anterioare ale variabilelor (valorile de la iterația $k-1$), iar în cadrul metodei Seidel-Gauss apar atât unele valori anterioare (pentru variabilele care nu au fost încă recalculate), cât și unele valori noi (valorile de la iterația k , pentru variabilele care au fost recalculate deja).

Relația de calcul iterativ este de forma:

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j^k) / a_{ii}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k \geq 0 \quad (8.6)$$

Această variantă de calcul indică o îmbunătățire a vitezei de convergență datorită folosirii unor informații mai precise din iterația curentă.

8.2.2.3. Metoda Seidel-Gauss modificată

Dacă se dorește o accelerare suplimentară a convergenței se poate folosi un factor de accelerare α . În ceea ce privește accelerarea vitezei de convergență, aceasta nu se produce pentru orice valoare a factorului α , iar alegerea optimă a acestuia este dependentă de problemă.

Formula de iterare a metodei Seidel-Gauss modificată este:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (x_i^{k+1} - x_i^k) \quad i = 1, \dots, n \quad (8.7)$$

În acest caz, noua aproximație se determină în funcție de aproximația calculată cu relația (8.6) căreia i se aplică o corecție dependentă de factorul de accelerare:

$$(x_i^{k+1})^* = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k \quad (8.8)$$

$$x_i^{k+1} = (x_i^{k+1})^* + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (x_i^{k+1} - x_i^k) \quad i = 1, \dots, n \quad (8.9)$$

Utilizarea unui factor de accelerare care nu a fost bine ales poate transforma un proces care îndeplinește condiția de convergență într-unul divergent. Valoarea acestui factor este dependent de problemă și se recomandă, ca atunci când se folosește metoda Seidel-Gauss modificată, acesta să se aleagă cu prudență între anumite valori. În general se recomandă utilizarea unor valori cuprinse în intervalul (0, 2).

Exemple numerice

Exemplul 1

Se consideră sistemul de ecuații liniar:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2 \\ 6x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -8 \\ -2x_1 + 5x_3 - 2x_4 = 16 \\ 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}$$

Se cere determinarea soluției acestui sistem folosind metoda iterativă Jacobi.

Rezolvare

Se alege aproximația inițială, $X_0 = [0; 0; 0; 0]$, abaterea maximă între două iterații, $E_{max} = 0,0001$ și numărul maxim de iterații, $N_{max}=100$, formula iterativă (8.3) devine:

$$\begin{cases} x_1 = (-2 - 6x_2 + 2x_3)/8 \\ x_2 = (-8 - 6x_1 + 2x_3 - 2x_4)/10 \\ x_3 = (16 + 2x_1 + 2x_4)/5 \\ x_4 = (2 - 2x_2 - 2x_3)/5 \end{cases}$$

Iterația 1

$$\begin{cases} x_1 = (-2 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0)/8 = -2/8 = -0,25 \\ x_2 = (-8 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)/10 = -8/10 = -0,8 \\ x_3 = (16 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0)/5 = 16/5 = 3,2 \\ x_4 = (2 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)/5 = 2/5 = 0,4 \end{cases}$$

Iterația 48

$$\begin{cases} x_1 = (-2 - 6 \cdot (-0,6272) + 2 \cdot 3,3477)/8 = 8,4586/8 = 1,0574 \\ x_2 = (-8 - 6 \cdot 1,0574 + 2 \cdot 3,3477 - 2 \cdot (-0,6882))/10 = -6,2726/10 = -0,6272 \\ x_3 = (16 + 2 \cdot 1,0574 + 2 \cdot (-0,6882))/5 = 16,7348/5 = 3,3477 \\ x_4 = (2 - 2 \cdot (-0,6272) - 2 \cdot 3,3477)/5 = -3,441/5 = -0,6882 \end{cases}$$

Exemplul 2

Se consideră sistemul format din 4 ecuații liniare definit în cadrul exemplului 1. Se cere determinarea soluției acestui sistem folosind metoda iterativă Seidel-Gauss.

Rezolvare

Se alege aproximația inițială, $X_0 = [0; 0; 0; 0]$, abaterea maximă între două iterații, $E_{max} = 0,0001$ și numărul maxim de iterații, $N_{max} = 100$, formula iterativă (8.6) devine:

$$\begin{cases} x_1 = (-2 - 6x_2 + 2x_3) / 8 \\ x_2 = (-8 - 6x_1 + 2x_3 - 2x_4) / 10 \\ x_3 = (16 + 2x_1 + 2x_4) / 5 \\ x_4 = (2 - 2x_2 - 2x_3) / 5 \end{cases}$$

Iterația 1

$$\begin{cases} x_1 = (-2 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0) / 8 = -2/8 = -0,25 \\ x_2 = (-8 - 6 \cdot (-0,25) + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) / 10 = -6,5/10 = -0,65 \\ x_3 = (16 + 2 \cdot (-0,25) + 2 \cdot 0) / 5 = 15,5/5 = 3,1 \\ x_4 = (2 - 2 \cdot (-0,65) - 2 \cdot 3,1) / 5 = -2,9/5 = -0,58 \end{cases}$$

Iterația 11

$$\begin{cases} x_1 = (-2 - 6 \cdot (-0,6272) + 2 \cdot 3,3477) / 8 = 8,4586/8 = 1,0574 \\ x_2 = (-8 - 6 \cdot 1,0574 + 2 \cdot 3,3477 - 2 \cdot (-0,6882)) / 10 = -6,2726/10 = -0,6272 \\ x_3 = (16 + 2 \cdot 1,0574 + 2 \cdot (-0,6882)) / 5 = 16,7348/5 = 3,3477 \\ x_4 = (2 - 2 \cdot (-0,6272) - 2 \cdot 3,3477) / 5 = -3,441/5 = -0,6882 \end{cases}$$

Exemplul 3

Se consideră sistemul format din 4 ecuații liniare definit în cadrul exemplului 1. Se cere determinarea soluției acestui sistem folosind metoda iterativă Seidel-Gauss modificată.

Rezolvare

Dacă se alege aproximația inițială $X_0 = [0; 0; 0; 0]$, abaterea maximă între două iterații $E_{max} = 0,0001$, numărul maxim de iterații $N_{max} = 100$, coeficientul de accelerare $\omega = 1,15$, formula iterativă devine:

$$\begin{cases} x_1 = (-2 - 6x_2 + 2x_3) / 8 \\ x_2 = (-8 - 6x_1 + 2x_3 - 2x_4) / 10 \\ x_3 = (16 + 2x_1 + 2x_4) / 5 \\ x_4 = (2 - 2x_2 - 2x_3) / 5 \end{cases}$$

Iterația 1

- Se determină noua aproximație cu formula metodei Seidel-Gauss obișnuită;

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = (-2 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0) / 8 = -2/8 = -0,25 \\ x_2^{(1)} = (-8 - 6 \cdot (-0,25) + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) / 10 = -6,5/10 = -0,65 \\ x_3^{(1)} = (16 + 2 \cdot (-0,25) + 2 \cdot 0) / 5 = 15,5/5 = 3,1 \\ x_4^{(1)} = (2 - 2 \cdot (-0,65) - 2 \cdot 3,1) / 5 = -2,9/5 = -0,58 \end{cases}$$

- Se calculează corecția folosind aproximația calculată și cea din iterația anterioară, iar apoi se determină noua aproximație, prin aplicarea acestei corecții valorii calculate cu metoda Seidel-Gauss obișnuită.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \omega \cdot (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}) = 0 + 1,15 \cdot (-0,25 - 0) = -0,2875 \\ x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \omega \cdot (x_2^{(1)} - x_2^{(0)}) = 0 + 1,15 \cdot (-0,65 - 0) = -0,7475 \\ x_3^{(1)} = x_3^{(0)} + \omega \cdot (x_3^{(1)} - x_3^{(0)}) = 0 + 1,15 \cdot (3,1 - 0) = 3,565 \\ x_4^{(1)} = x_4^{(0)} + \omega \cdot (x_4^{(1)} - x_4^{(0)}) = 0 + 1,15 \cdot (-0,58 - 0) = -0,667 \end{cases}$$

Iterația 9

$$\begin{cases} x_1^{(9)} = (-2 - 6 \cdot (-0,6273) + 2 \cdot 3,3476) / 8 = 8,4586/8 = 1,0574 \\ x_2^{(9)} = (-8 - 6 \cdot 1,0574 + 2 \cdot 3,3477 - 2 \cdot (-0,6882)) / 10 = -6,2726/10 = -0,6273 \\ x_3^{(9)} = (16 + 2 \cdot 1,0574 + 2 \cdot (-0,6882)) / 5 = 16,7348/5 = 3,3476 \\ x_4^{(9)} = (2 - 2 \cdot (-0,6273) - 2 \cdot 3,3476) / 5 = -3,441/5 = -0,6882 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(9)} = x_1^{(8)} + \omega \cdot (x_1^{(9)} - x_1^{(8)}) = 1,0576 + 1,15 \cdot (1,0574 - 1,0576) = 1,0574 \\ x_2^{(9)} = x_2^{(8)} + \omega \cdot (x_2^{(9)} - x_2^{(8)}) = -0,6274 + 1,15 \cdot (-0,6273 + 0,6274) = -0,6272 \\ x_3^{(9)} = x_3^{(8)} + \omega \cdot (x_3^{(9)} - x_3^{(8)}) = 3,3478 + 1,15 \cdot (3,3476 - 3,3478) = 3,477 \\ x_4^{(9)} = x_4^{(8)} + \omega \cdot (x_4^{(9)} - x_4^{(8)}) = -0,6882 + 1,15 \cdot (-0,6882 + 0,6882) = -0,6882 \end{cases}$$

8. 3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării și metodele numerice iterative de determinare a soluției unui sistem de ecuații liniare.
2. Se vor studia funcțiile Matlab pentru soluționarea numerică a sistemelor de ecuații liniare prezentate în Anexa 1.
3. Se testează programele de calcul *met_jacobi*, *met_seidelgaus* și *met_seidelgauss_modif*. construite în Matlab prezentate în Anexa 2, folosind exemplele numerice prezentate în paragraful 2.
4. Se soluționează următoarele aplicații cu ajutorul metodelor Jacobi, Seidel-Gauss și Seidel-Gauss modificată.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Rezolvarea se va face manual, iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcțiilor implementate în Matlab *met_jacobi*, *met_seidelgaus* și *met_seidelgauss_modif*.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele obținute și condițiile în care au rezultat.