

LUCRAREA 9

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII NELINIARE FOLOSIND METODE NEWTON

9.1. Obiectivele lucrării

Soluționarea numerică a sistemelor de ecuații neliniare pune probleme mult mai mari decât cele din domeniul liniar. Neliniaritățile pot fi de mai multe feluri, ceea ce exclude posibilitatea definirii unor relații de dependență între funcțiile care definesc ecuațiile sistemului. În mod uzual, aceste sisteme sunt de ordin ridicat, numărul ecuațiilor, respectiv al necunoscutelor, fiind de cele mai multe ori de ordinul zecilor. În cadrul lucrării sunt prezentate cele mai utilizate metode de rezolvare numerică a sistemelor de ecuații neliniare, și anume metodele de tip Newton.

Cerințele lucrării se referă la soluționarea numerică a unui sistem de ecuații neliniare utilizând metoda Newton-Raphson. Rezolvarea se va efectua prin calcul manual și cu funcția Matlab *met_newraph*. Se va efectua o analiză a rezultatelor obținute și a condițiilor în care au rezultat.

9.2. Aspecte teoretice

9.2.1. Generalități

Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații neliniare reprezintă o problemă mult mai dificilă în comparație cu determinarea rădăcinilor unei ecuații algebrice. Deoarece

Un sistem de ecuații neliniare de ordinul n are următoarea formă generică:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

Dacă se fac notațiile matriceale:

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \quad (9.2)$$

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^t \quad (9.3)$$

$$F(X)=0 \tag{9.4}$$
$$X^{k+1} = F(X^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.5)$$

Toate metodele practice de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare care au ca rezultat ecuații (9.1) sunt metode de tip iterativ, adică pornind de la o aproximație inițială, se calculează o nouă aproximație și așa mai departe până când va fi îndeplinită o condiție de convergență. Pentru rezolvarea unei aplicații concrete se va alege cea mai bună metodă care să conducă la un timp total de calcul cât mai redus (număr total de operații aritmetice cât mai mic, precizie să fie cât mai mic), în condițiile asigurării unei precizii impuse și a estimării corecte a erorii (fără calcule suplimentare). În cele ce urmează sunt prezentate unele

dintre cele mai utilizate metode de rezolvare numerică a sistemelor de ecuații neliniare, metodele Newton.

9.2.2. Metode de tip Newton

Metodele de tip Newton sunt metode de tip iterativ care determină o soluție aproximativă X^* corespunzătoare unui sistem de ecuații neliniare. Caracteristica principală a acestor metode este reprezentată de utilizarea derivatelor parțiale ale funcțiilor f_i , $i = 1, \dots, n$, în raport cu toate variabilele. Există și variante care utilizează și derivatele parțiale de ordin superior, dar acestea sunt folosite destul de rar datorită volumului mare de calcule care îl presupun. În continuare se va face referire doar la metoda Newton-Raphson.

Dacă se consideră un sistem de ecuații neliniare de ordinul n scris sub forma matriceală (9.4), relația de recurență care stă la baza procesului iterativ asociat metodei Newton-Raphson este:

$$X^{k+1} = X^k - J^{-1}(X^k) \cdot F(X^k) \quad (9.6)$$

unde:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

este matricea Jacobiană

Determinarea soluției presupune un număr relativ mare de operații, putând apărea uneori dificultăți suplimentare legate de formele relativ complexe ale derivatelor parțiale care definesc matricea jacobiană J . Tot ca dezavantaj al metodei se poate sublinia și necesitatea rezolvării repetate a unui sistem de ecuații liniare sau a inversării repetate a matricei jacobiene J la fiecare iterație.

Aplicarea cu succes a metodei Newton-Raphson se poate face numai în anumite condiții legate de alegerea aproximației inițiale în vecinătatea soluției exacte X^* . Procesul de calcul este iterativ și se oprește atunci când este îndeplinită condiția de convergență:

$$\left| X^k - X^{k-1} \right| \leq \varepsilon \quad (9.8)$$

unde ε este eroarea maximă admisă la calculul soluției sistemului dat.

Exemplu numeric

Se consideră un sistem format din două ecuații neliniare. Se cere determinarea soluției folosind metoda Newton-Raphson.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare

Se calculează matricea jacobiană,

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

astfel încât sistemul de ecuații liniare asociat metodei este:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + 1 \\ -x_1^3 + x_2 \end{bmatrix}$$

Se inițializează aproximația inițială a soluției:

$$x_1^0 = 0,7; \quad x_2^0 = 0,4.$$

Iteratia 1.

Se înlocuiește aproximația inițială în sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{bmatrix} 1,4 & 0,8 \\ 1,47 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^1 \\ \Delta x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,057 \end{bmatrix}$$

Soluția sistemului este:

$$\Delta x_1^1 = 0,1536; \quad \Delta x_2^1 = 0,1687$$

Noile valori ale aproximațiilor, ținând cont de abaterile Δx_1^1 și Δx_2^1 sunt următoarele :

$$x_1^1 = 0,7 + 0,1536 = 0,8536$$

$$x_2^1 = 0,4 + 0,1687 = 0,5687$$

Iteratia 2.

Valorile noilor aproximații se înlocuiesc în sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{bmatrix} 1,7071 & 1,1375 \\ 2,1858 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^2 \\ \Delta x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05202 \\ -0,05326 \end{bmatrix}$$

Soluția sistemului astfel obținut este:

$$\Delta x_1^2 = -0,0268; \quad \Delta x_2^2 = -0,0055$$

Noile valori ale aproximațiilor, ținând cont de abaterile Δx_1^2 și Δx_2^2 sunt următoarele:

$$x_1^2 = 0,8536 - 0,0268 = 0,8267$$

$$x_2^2 = 0,5687 - 0,0055 = 0,5633$$

Iteratia 3.

Aproximațiile x_1^2 și x_2^2 se înlocuiesc în sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{bmatrix} 1,6535 & 1,1265 \\ 2,0505 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^3 \\ \Delta x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,000707 \\ -0,001694 \end{bmatrix}$$

Soluția sistemului obținut este:

$$\Delta x_1^3 = -0,0007078; \quad \Delta x_2^3 = 0,0003729$$

Noile aproximații, ținând cont de abaterile Δx_1^3 și Δx_2^3 sunt următoarele:

$$x_1^3 = 0,8267 - 0,0007078 = 0,8260$$

$$x_2^3 = 0,5633 + 0,0003729 = 0,5636$$

Analiza evoluției calculelor relevă convergența foarte bună a metodei Newton-Raphson, mai ales în apropierea soluției exacte.

9. 3. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se studiază fișierul funcție *met_newraph* dezvoltat în limbajul Matlab prezentat în Anexa 2.
3. Se testează fișierul funcție *met_newraph* folosind exemplul numeric prezentat în paragraful 2.
4. Se soluționează următoarele aplicații cu ajutorul metodei Newton-Raphson.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 3x_1^3 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - 5x_2 = 0 \end{cases}$$

Rezolvarea se va face manual, iar rezultatele vor fi comparate cu cele obținute prin utilizarea funcției Matlab *met_newraph*.

5. Pentru aplicațiile de la punctul 4 se vor compara și analiza rezultatele obținute și condițiile în care au rezultat.