

Capitolul 3

PROGRAMAREA LINIARĂ

Ce este programarea liniară?

- *“... determinarea valorii maxime sau minime a unei funcții liniare, în care mai multe variabilele de optimizare sunt supuse unor restricții.” (dictionary.com)*
- *O problemă de programare liniară este o “problemă care necesită minimizarea unei funcții ce are o expresie liniară în prezența unor restricții liniare...” (Dantzig)*

Istoria Programării Liniare

- *Totul a început în anul 1947, când GB Dantzig a pus bazele "metodei simplex" folosită în rezolvarea problemelor de planificare din US Air Force, probleme care aveau o formă liniară.*
- *Ulterior, a devenit clar faptul că o gamă surprinzător de largă de probleme din diverse domenii pot fi aduse la o formă corespunzătoare programării liniare și rezolvate prin metoda simplex.*



Importanța PROGRAMĂRII LINIARE

Multe dintre problemele din lumea reală se pretează a fi rezolvate folosind programarea liniară.

- Inginerie ;**
- Agricultură;**
- Marketing ;**
- Economie;**
- Finanțe (investiții);**
- Publicitate.**

Ce este o problemă de programare liniară?

O problemă de programare liniară (PL) este o problemă de optimizare în care:

- 1. Se încearcă maximizarea (sau minimizarea) unei funcții ce are o expresie liniară (numită funcția obiectiv) dependentă de variabilele de optimizare;**
- 2. Valorile variabilelor de optimizare trebuie să satisfacă o mulțime de restricții;**
- 3. Fiecare restricție de egalitate sau inegalitate trebuie să aibă o expresie liniară.**
- 4. O restricție de semn este asociată fiecărei variabile de optimizare. Pentru fiecare variabilă x_i , avem ($x_i \geq 0$).**

Descrierea problemei

$$\max (\min) \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

în prezența restricțiilor:

$$a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \leq b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \leq b_m$$

sau, într-o formă simplificată:

$$\max (\min) \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

în prezența restricțiilor:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Exemplu :

$$\text{Max} \quad 5x_1 + 7x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 \leq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 19$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0 \text{ and } x_2 \geq 0$$

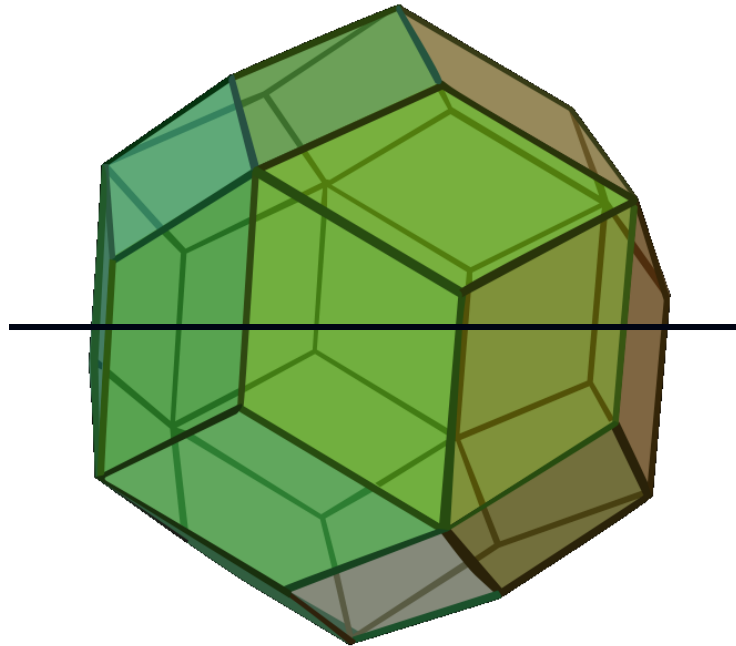
— Funcția obiectiv

} Restricții

— Restricții de non-negativitate

Incercați și imaginați-vă...

- Un poliedru foarte mare, convex;
- Un plan care intersectează această poliedru;



Interpretarea reprezentării grafice

- Poliedrul reprezintă mulțimea de restricții de inegalitate.
- Planul reprezintă funcția obiectiv liniară care trebuie maximizată.

Important

- Programarea liniară solicită numai expresii liniare.

Expresie corectă: $ax + by + cz \leq 3$

Expresie incorectă: ~~$ax^2 + \log_2 y \geq 7$~~

Proporționalitate și ipoteze suplimentare

Funcția obiectiv corespunzătoare unei probleme de programare liniară trebuie să fie o funcție lineară dependentă de variabilele de decizie, ceea ce presupune următoarele două implicații:

- 1. Contribuția fiecărei variabile de optimizare la valoarea funcției obiectiv este proporțională cu valoarea variabilei de optimizare.**
- 2. Contribuția la valoarea funcției obiectiv a fiecărei variabile de optimizare este independentă de celelalte variabile de optimizare.**

Proporționalitate și ipoteze suplimentare - continuare

Fiecare restricție trebuie să fie o inegalitate liniară sau o ecuație liniară, ceea ce presupune următoarele două implicații:

1. Contribuția fiecărei variabile de optimizare la expresia fiecărei restricții este proporțională cu valoarea variabilei.

2. Contribuția unei variabile de optimizare din cadrul expresiei fiecărei restricții este independentă de valorile variabilei.

Proportionalitate și ipoteze suplimentare - continuare

Ipoteza divizibilității

Presupunerea divizibilității necesită ca fiecare variabilă de optimizare să poată lua valori fracționare.

Ipoteza certitudinii

Presupunerea certitudinii necesită ca fiecare componentă din modelul matematic corespunzător unei probleme de programare liniară (coeficienții funcției obiective, termenii liberi din restricții și coeficienții din expresiile restricțiilor) să fie cunoscută cu certitudine.

Forma matematică a problemelor PL

1. Forma generală

$$\max(\min) F(X) = \max(\min) \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Forma matematică a problemelor PL

2. Forma standard

Forma în care toate restricțiile sunt exprimate prin egalități și toate variabilele sunt supuse condiției de nonnegativitate.

$$\max(\min) F(X) = \max(\min)(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Variabile suplimentare de eliminare/adăugare

- Forma standard este obținută prin adăugarea de variabile pentru forma inegalităților “ \leq ”, și prin eliminarea de variabile forma inegalităților “ \geq ”.
- Variabilele suplimentare de eliminare/adăugare reprezintă diferența dintre partea stânga și cea dreaptă a restricțiilor.
- In expresia funcției obiectiv, aceste variabile suplimentare au coeficienți egali cu 0.

■ Exemplul 1 in Forma Standard

$$\max \quad 5x_1 + 7x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

în prezența restricțiilor:

$$x_1 + s_1 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 19$$

$$x_1 + x_2 + s_3 = 8$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

s_1 , s_2 , și s_3 sunt variabile auxiliare de adaugare

Forma matematică a problemelor PL

3. Forma matriceala

$$\max(\min) F(X) = \max(\min) CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

A – matricea coeficienților sistemului de restricții;

b – vectorul coloană al termenilor liberi;

X – vectorul coloană al celor n necunoscute;

C – vectorul coeficienților funcției obiectiv $F(X)$.

Forma matematică a problemelor PL

4. Forma vectorială

Se obține prin partiționarea matricei A după coloanele sale, a_1, a_2, \dots, a_n .

$$\max F(X) = \max CX$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

$$X \geq 0$$

a – coloanele matricei A corespunzătoare sistemului de restricții;

b – vectorul coloană al termenilor liberi;

x – cele n necunoscute;

C – vectorul coeficienților funcției obiectiv $F(X)$.

Forma matematică a problemelor PL

5. Forma canonică

Forma în care restricțiile sunt concordante și toate variabilele sunt supuse condiției de nenegativitate.

O restricție corespunzătoare unei probleme de programare liniară spunem că este concordantă dacă este o inegalitate de tipul " \geq ", când funcția obiectiv trebuie minimizată, respectiv este o egalitate de tipul " \leq ", când se cere maximizarea funcției obiectiv.

$$\max F(X) = \max CX$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

sau

$$\min F(X) = \min CX$$

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0$$

Definiții în Programarea Liniară

O ***soluție admisibilă*** a problemei de programare liniară este un vector $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$ care satisface sistemul de ecuații al restricțiilor, respectiv condiția de nenegativitate.

O ***soluție admisibilă de bază*** este o soluție admisibilă care conține cel puțin $(n - m)$ componente x_j care au valoarea zero, în care m este numărul restricțiilor iar n reprezintă numărul variabilelor de optimizare.

O ***soluție admisibilă de bază nedegenerată*** are exact m necunoscute x_j cu valoare pozitivă (> 0).

O ***soluție optimală*** este o soluție admisibilă care extremizează funcția obiectiv.

Teoreme în Programarea Liniară

Teorema 1

Funcția obiectiv își realizează optimul într-un punct extrem al mulțimii restricțiilor. Dacă își realizează optimul în mai mult decât un punct extrem, atunci funcția obiectiv ia aceeași valoare în fiecare punct de pe segmentul de dreaptă care unește oricare două puncte optimale.

Teorema 2

Un vector $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$ este un punct extrem al mulțimii restricțiilor unei probleme de programare liniară dacă și numai dacă X este o soluție admisibilă de bază.

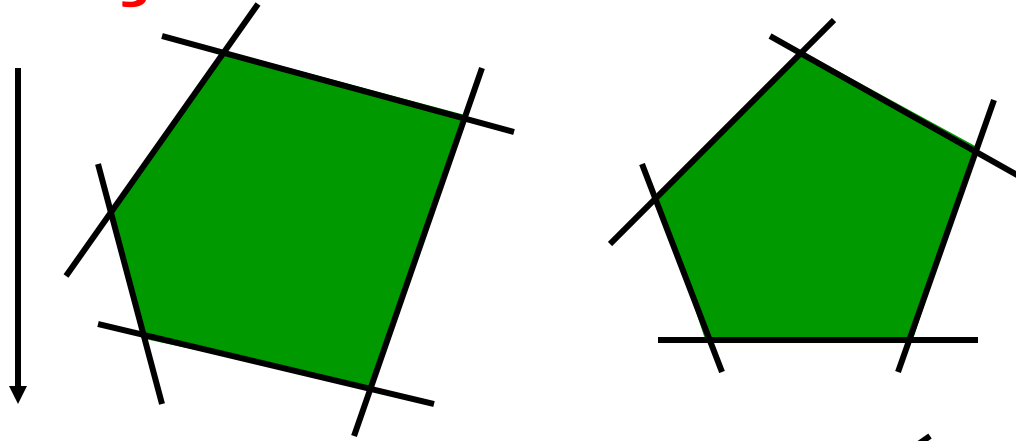
Analiza grafică în Programarea Liniară

**Mulțimea tuturor punctelor care
îndeplinesc toate restricțiile
modelului matematic se numește**

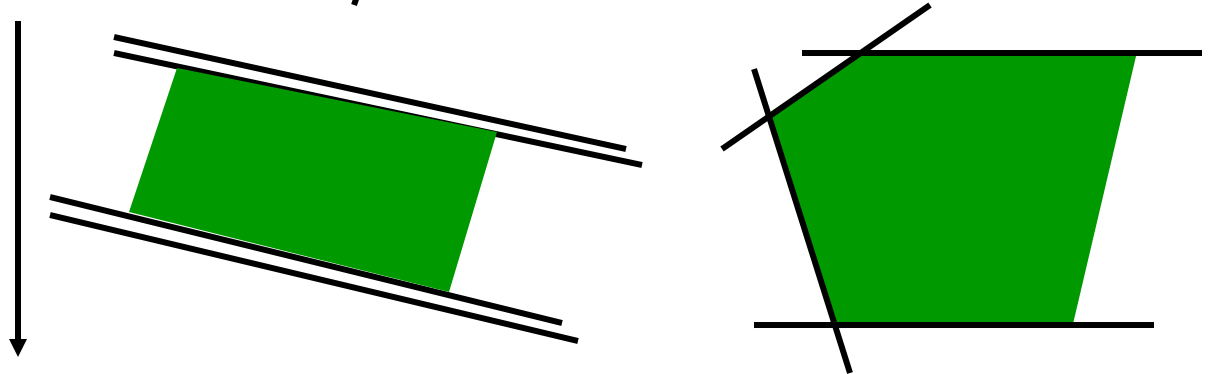
MULȚIME ADMISIBILĂ

Muțimi admisibile

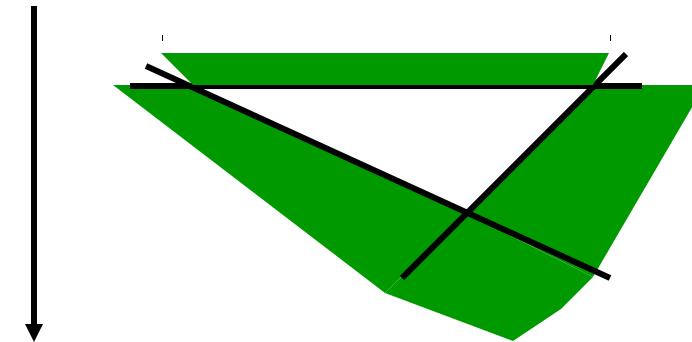
1. Mărginite



2. Nemărginite



3. Vide (Goale)



Pașii Algoritmului

- **Reprezentarea grafică a inegalităților și identificarea vârfurilor poligonului format.**
- **Înlocuirea coordonatelor nodurile în funcția obiectiv**
- **Determinarea valorilor minimă și maximă.**

Exemplul 1.

Să se determine minimul funcției

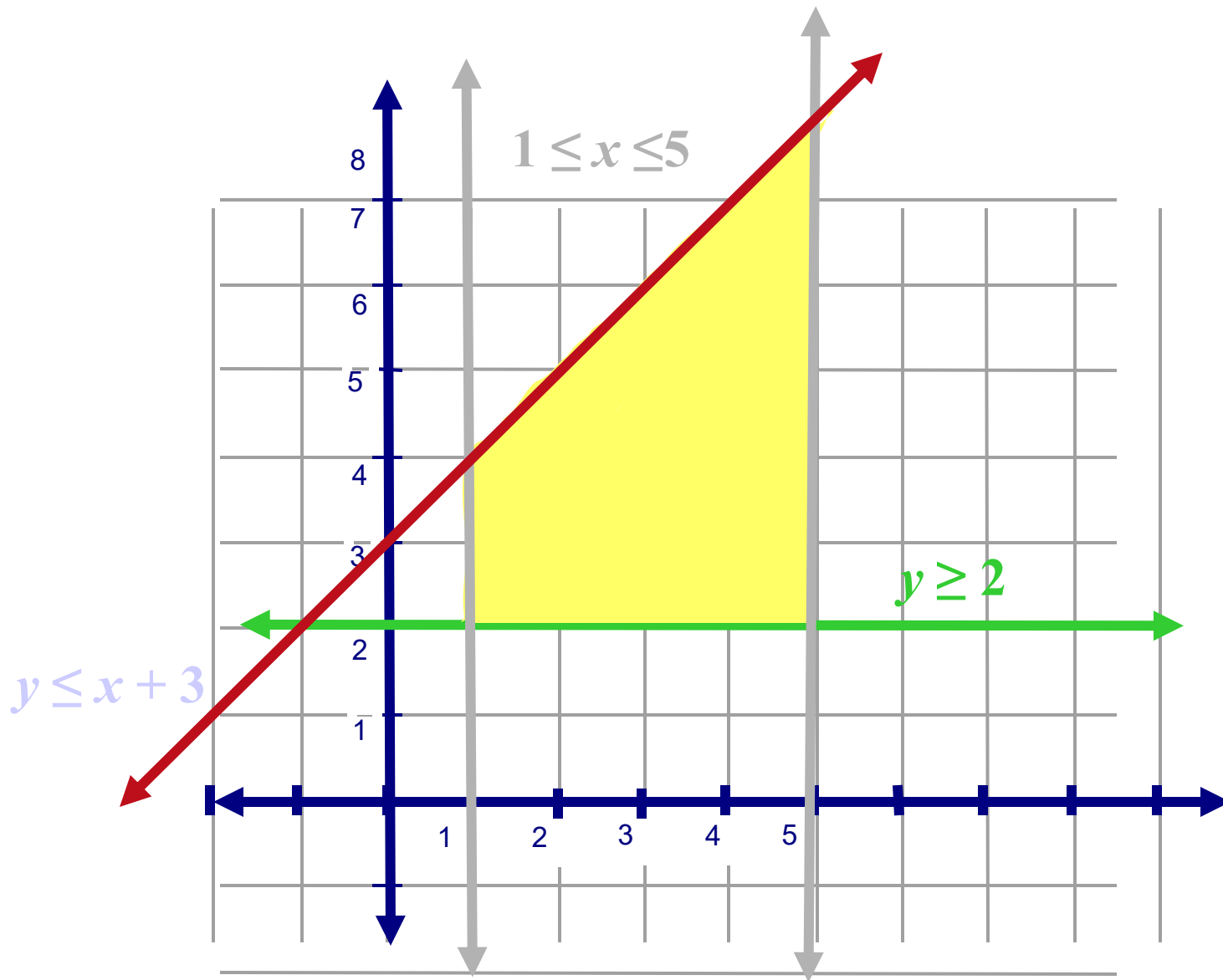
$$F(x, y) = 3x - 2y.$$

în prezența restricțiilor:

$$y \geq 2$$

$$1 \leq x \leq 5$$

$$y \leq x + 3$$



- **Vârfurile poligonului format sunt:**
(1, 2) (1, 4) (5, 2) (5, 8)
- **Coordonatele determinate în pasul anterior sunt introduse succesiv în funcția obiectiv:**

$$F(x, y) = 3x - 2y$$

$$F(x, y) = 3x - 2y$$

- $F(1, 2) = 3(1) - 2(2) = 3 - 4 = -1$
- $F(1, 4) = 3(1) - 2(4) = 3 - 8 = -5$
- $F(5, 2) = 3(5) - 2(2) = 15 - 4 = 11$
- $F(5, 8) = 3(5) - 2(8) = 15 - 16 = -1$

- $f(1, 4) = -5$ **minimum**
- $f(5, 2) = 11$ **maximum**

Exemplul 2

$$\max 8X_1 + 5X_2$$

— funcția obiectiv

$$2X_1 + 1X_2 \leq 1000$$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 2400$$

$$X_1 + X_2 \leq 700$$

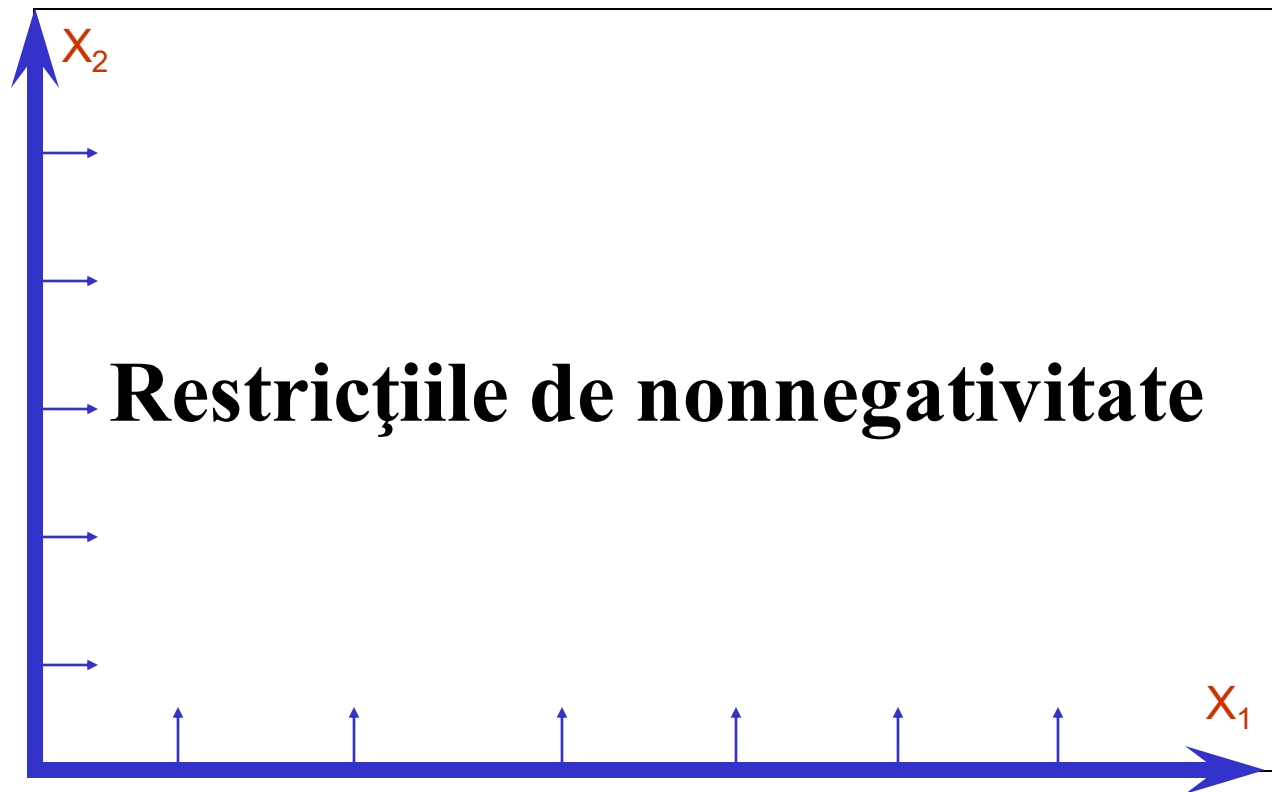
$$X_1 - X_2 \leq 350$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2$$

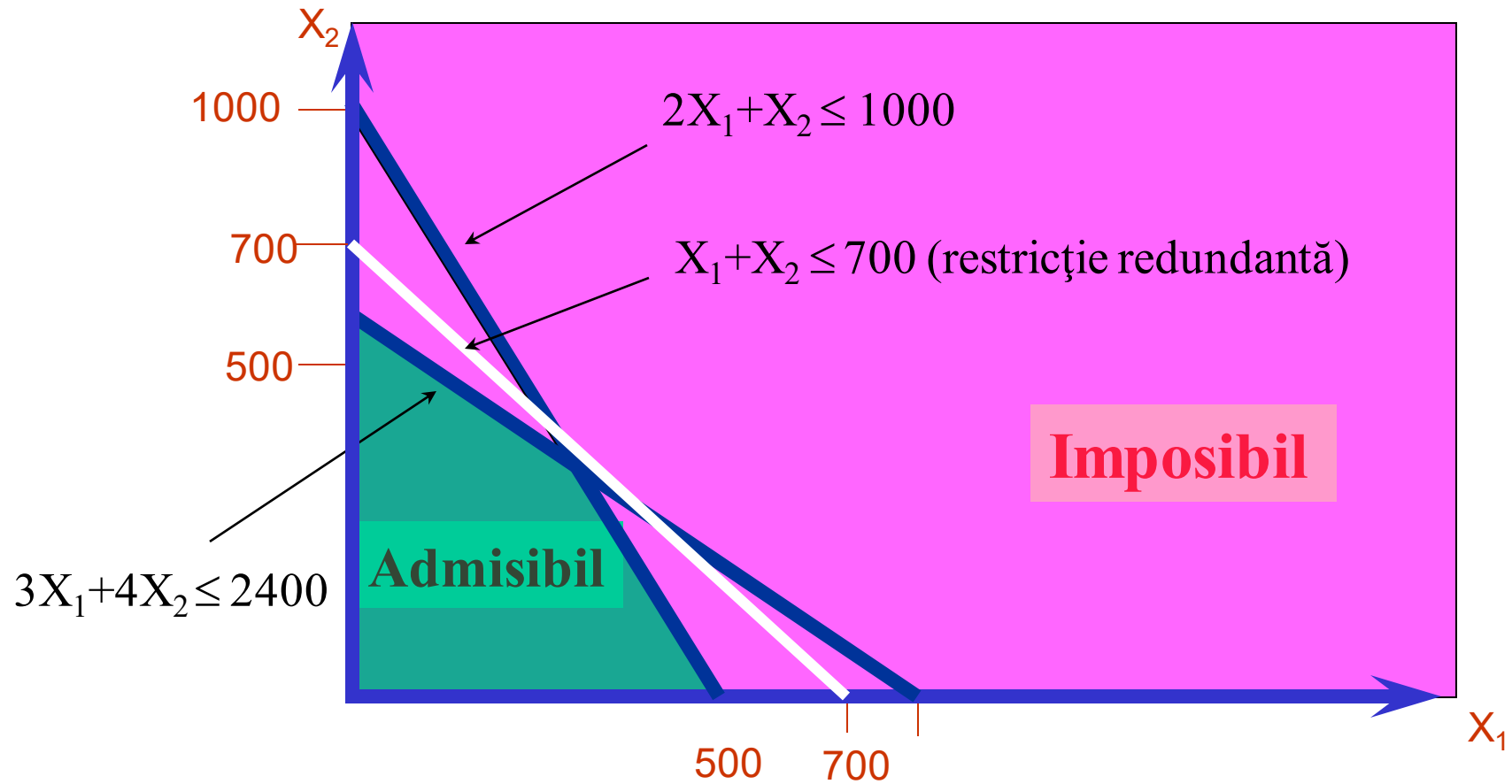
— restricții de inegalitate

— restricții de
nonnegativitate

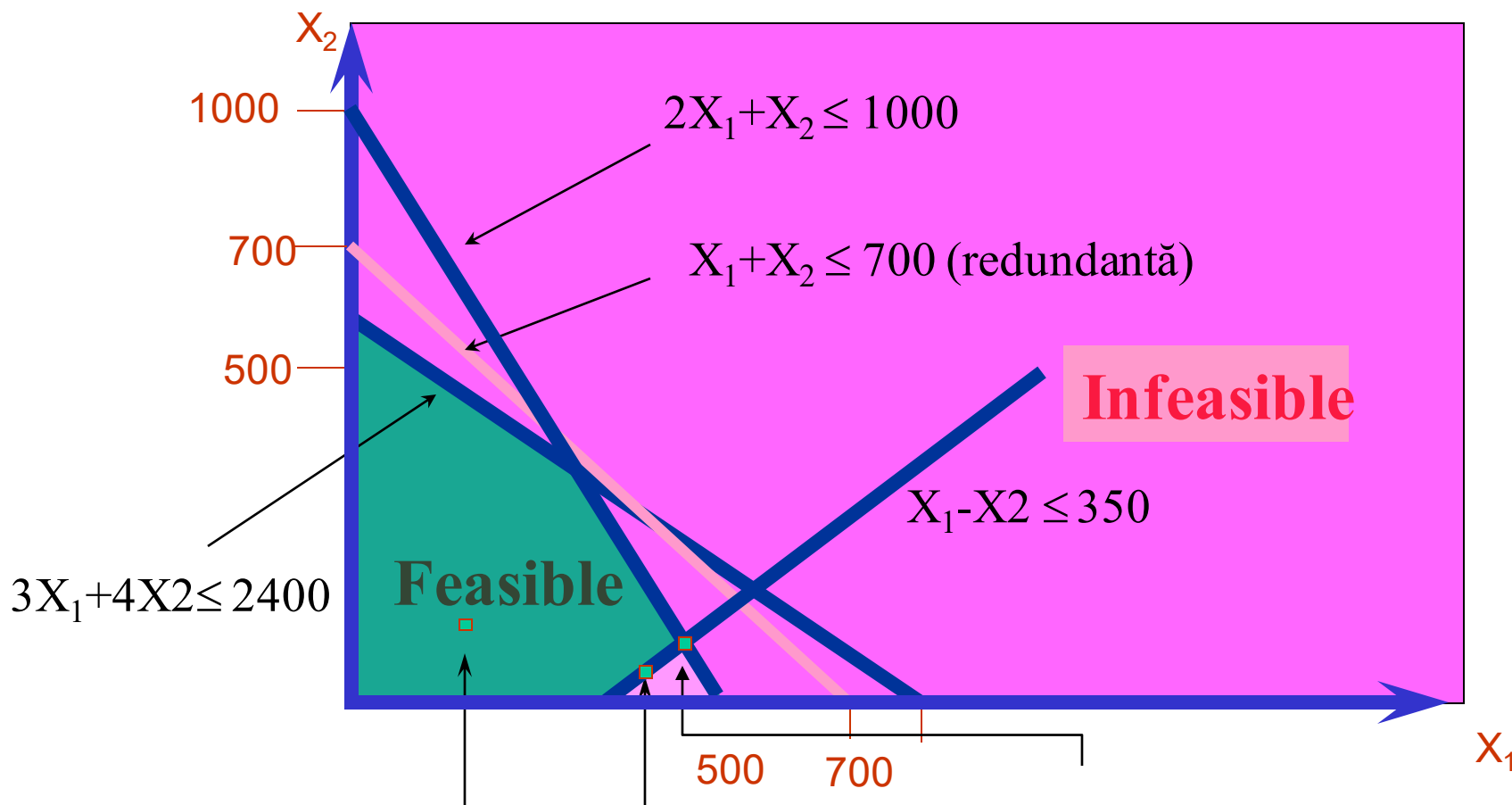
Analiza grafică – Mulțimea admisibilă



Analiza grafică – Mulțimea admisibilă



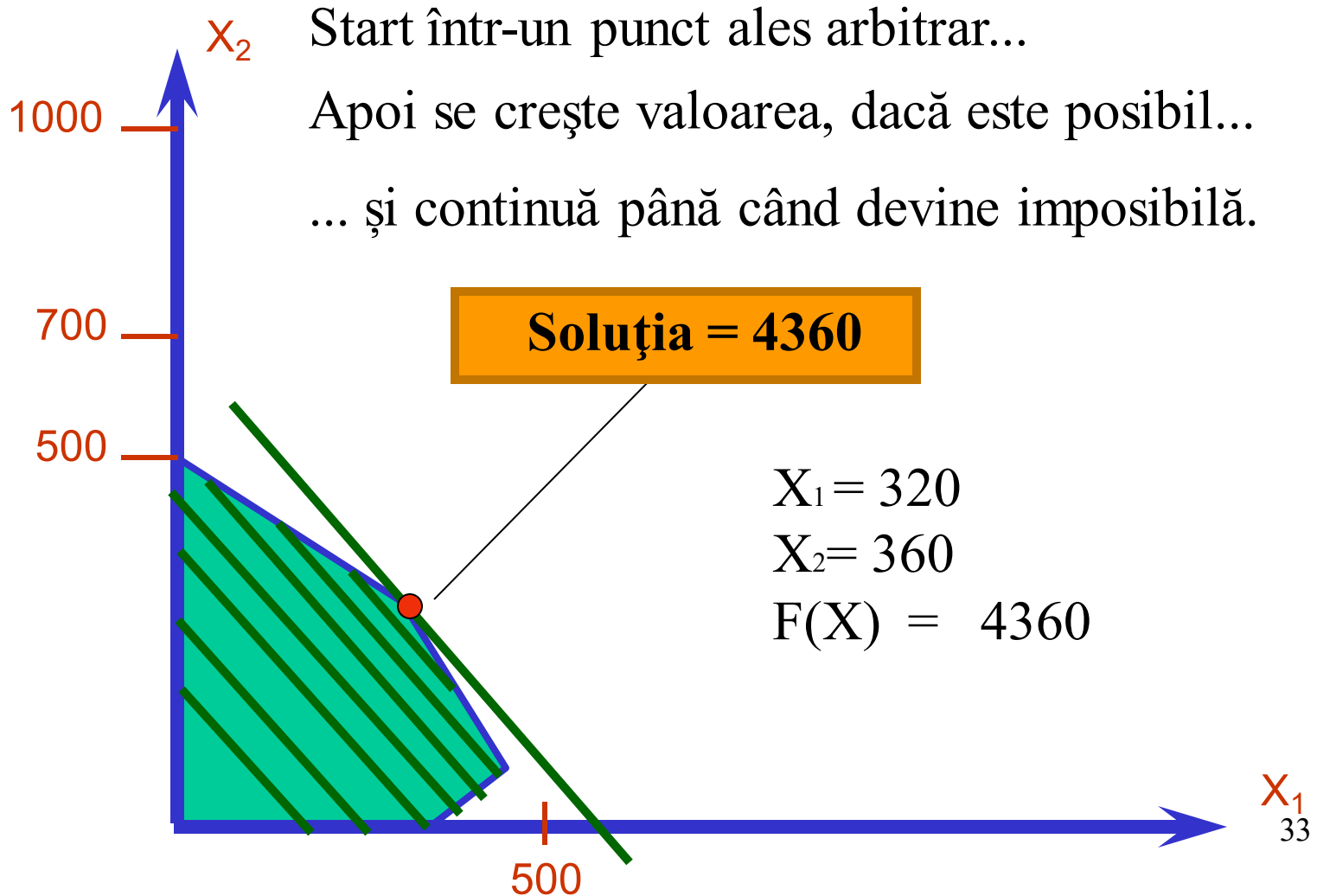
Analiza grafică – Mulțimea admisibilă



Puncte interioare Puncte de frontieră Puncte extreme

- **Există trei tipuri de puncte admisibile**

Determinarea soluției optime



Exemplul 3

Determinați valoarea minimă și maximă a funcției

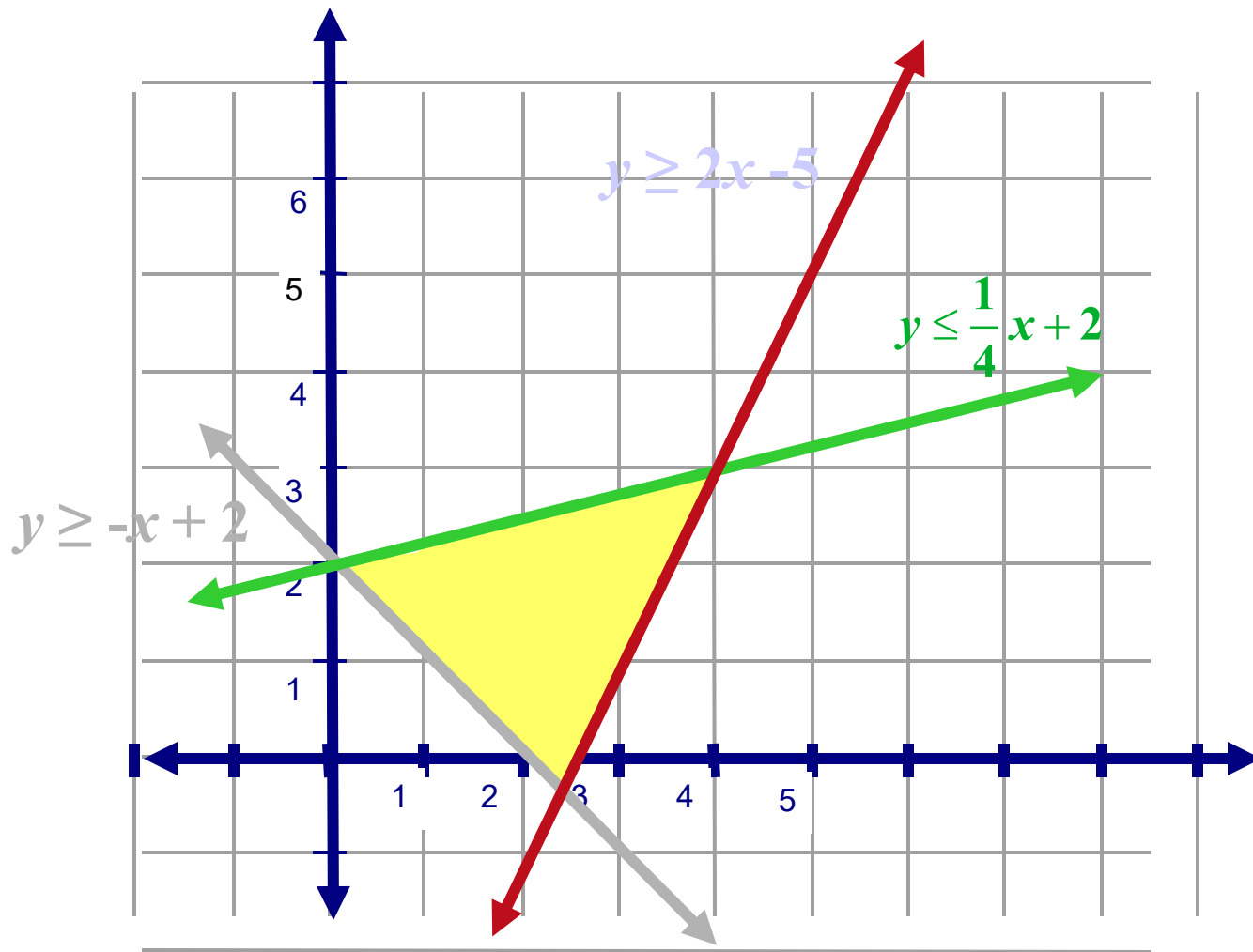
$$F(x, y) = 4x + 3y$$

în prezența restricțiilor

$$y \geq -x + 2$$

$$y \leq \frac{1}{4}x + 2$$

$$y \geq 2x - 5$$



Vârfurile poliedrului convex:

$$F(x, y) = 4x + 3y$$

$$F(0, 2) = 4(0) + 3(2) = 6$$

$$F(4, 3) = 4(4) + 3(3) = 25$$

$$F\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 4\left(\frac{7}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} - 1 = \frac{25}{3}$$

$$f(0, 2) = 6 \quad \text{minimum}$$

$$f(4, 3) = 25 \quad \text{maximum}$$

Metoda simplex primal

Metoda geometrică nu poate fi extinsă la probleme PL pentru care numărul de variabile de decizie este mai mare de 3.

Această metodă reprezintă una dintre cele mai folosite metode de rezolvare a problemelor de programare liniară.

- mulțimea soluțiilor admisibile este un poliedru convex;
- orice punct de extrem local este un punct de extrem global, funcția obiectiv fiind liniară;
- funcția obiectiv fiind liniară, extremul se atinge într-unul din vârfurile poliedrului soluțiilor admisibile.

Algoritmul metodei Simplex primal

Etapele principale ale metodei simplex sunt următoarele

Etapa 1. Calculul matricei G :

$$G = B^{-1} \cdot R = g_{sj}$$

Etapa 2. Calculul diferențelor $F_j - C_j$:

$$(F_j - C_j) = \sum_{s \in I} C_s \cdot g_{sj} - C_j, \quad j = m+1, \dots, n$$

Etapa 3. Se analizează semnele diferențelor $F_j - C_j$:

- dacă $(F_j - C_j) > 0$, atunci \bar{X}^B este o soluție optimală;
- dacă $(F_j - C_j) < 0$, se trece la punctul următor.

Etapa 4. Se alege variabila de intrare în bază :

$$(F_l - C_l) = \max_j |F_j - C_j|, \quad j = m+1, \dots, n$$

Etapa 5. Se găsește variabila k ce părăsește baza cu relația:

$$\theta_k = \min_s \left\{ \frac{\bar{X}_s^B}{g_{sl}}, \quad g_{sl} \geq 0 \right\}$$

Etapa 6. Se formează o altă bază și se reia calculul de la pasul 1, criteriul de oprire fiind cel specificat la pasul 3.